

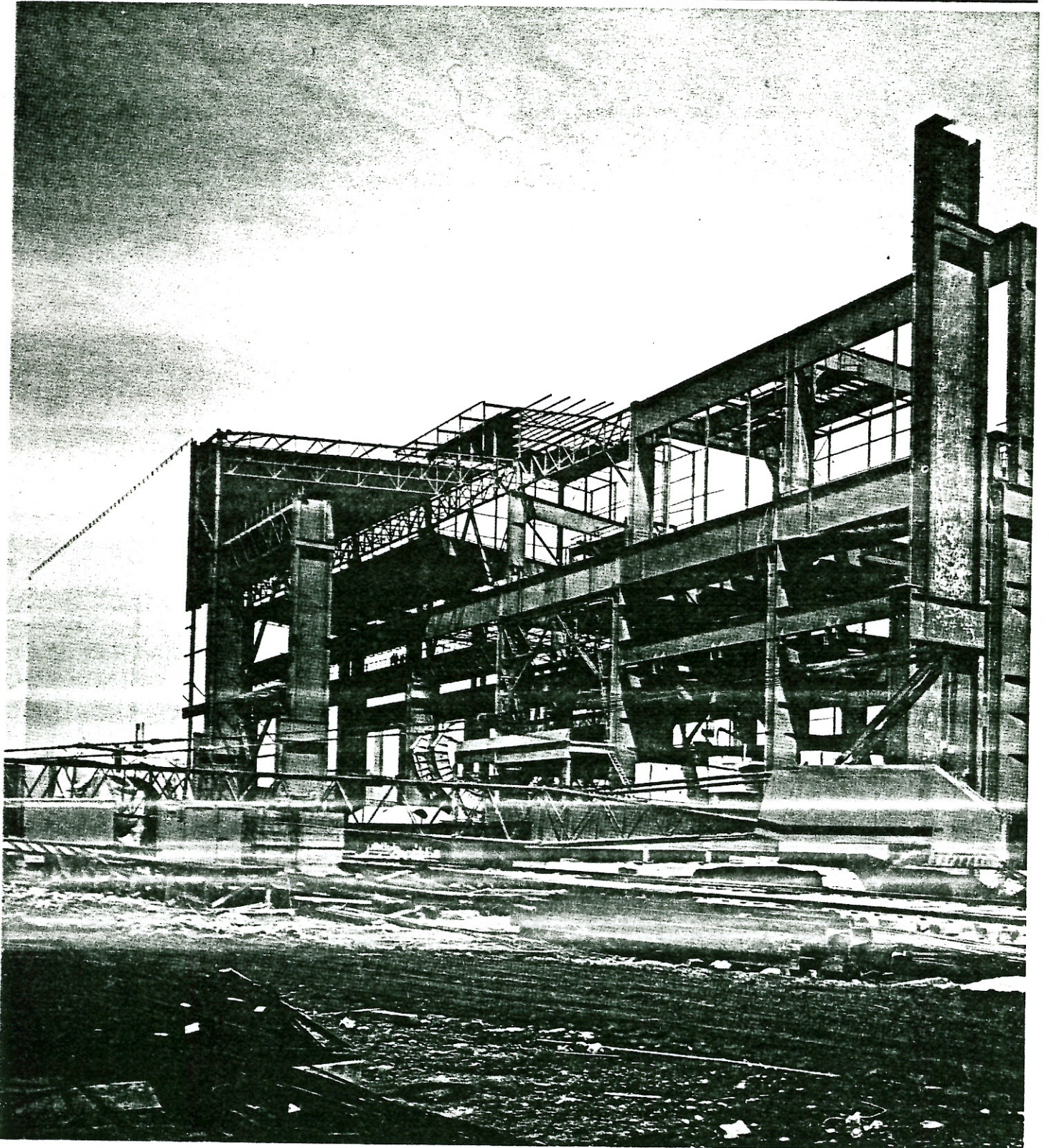
# acciaio

edizione italiana di

# acier-stahl-steel

10/1976

TECI - SESTO S. G.  
10 DIC. 1976



# Strutture spaziali leggere. Progettazione interattiva mediante l'impiego di elaboratore elettronico

Ing. Massimo Majowiecki,  
Istituto di Tecnica delle Costruzioni  
della Facoltà di Ingegneria  
Dott. Giordina Tironi,  
Centro di Calcolo della  
Facoltà di Ingegneria,  
Università di Bologna

## INTRODUZIONE

Nella pratica corrente della progettazione di membrane spaziali leggere (il cui peso si aggira intorno a 1-3 kg/m<sup>2</sup>), si presentano vari problemi che fanno diventare questo tipo di progettazione molto laborioso e costoso.

Il primo problema è rappresentato dalla ricerca della forma geometrica da dare alla superficie strutturale perché il materiale che la costituisce, resistente solo a sforzi di trazione, possa garantire la stabilità e la resistenza, tenendo conto, inoltre, che la geometria della superficie strutturale deve anche soddisfare determinati requisiti architettonici definiti in precedenza.

Un procedimento preliminare per definire la geometria della struttura è quello della costruzione di modelli. Ma è evidente che, dovendo in genere i tentativi di progetto essere numerosi, la costruzione di modelli comporterebbe tempi e costi notevoli e qualche volta non ammissibili. Inoltre, questo tipo di modelli può dare un'indicazione visiva senza dare nessun conforto per quanto riguarda le verifiche di idoneità geometrica, atte a garantire il suo funzionamento statico tanto nella condizione di sola pressione quanto nelle varie fasi di carico.

L'unico modo conveniente e rapido per la progettazione sia architettonica sia strutturale di questo tipo di realizzazioni è offerto da programmi elettronici strutturati interattivamente. Questi programmi permettono, mediante l'impiego di un calcolatore, fornito di un sistema visivo (Display graphics system), una progettazione rapida, visiva e divertente.

Finito il progetto interattivo è possibile ottenere, mediante plotterizzazione, i risultati geometrici visibili sullo schermo: prospettive, prospetti, nonché le verifiche del caso. Nella prima parte del presente articolo vengono esposte

le schematizzazioni teoriche e le relazioni che governano il funzionamento della struttura. Nella seconda parte, la determinazione automatica mediante l'impiego di un « computer graphics display system » verrà illustrata con numerose visualizzazioni.

## 1. LA GEOMETRIA COME CONSEGUENZA DELLO STATO DI SOLLECITAZIONE

### 1.1. Membrane con contorno rigido

Come è noto, le equazioni indefinite esprimono le condizioni di equilibrio alla traslazione di un elemento infinitesimo di membrana, secondo le tre direzioni  $x, y, z$  costituenti un generico riferimento cartesiano, possono venire scritte nella forma seguente:

$$(\Sigma X = 0) \quad \frac{\partial \bar{n}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} + \bar{p}_x = 0 \quad (1)$$

$$(\Sigma Y = 0) \quad \frac{\partial \bar{n}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{p}_y = 0 \quad (2)$$

$$(\Sigma Z = 0) \quad \bar{n}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \bar{n}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \bar{t} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \left( \bar{p}_x + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (3)$$

dove, con il solito significato dei simboli:

$\bar{n}_x$  = proiezione sul piano  $z = 0$  dello sforzo normale secondo  $x$ ,

$\bar{n}_y$  = proiezione sul piano  $z = 0$  dello sforzo normale secondo  $y$ ,

$\bar{t}_{xy} = \bar{t}_{yx} = \bar{t}$  = proiezione dello sforzo di taglio sul piano  $z = 0$ ,

$\bar{p}_x, \bar{p}_y$  e  $\bar{p}_z$  = componenti di  $p$  per unità di superficie proiettati sui piani  $yz, xz, xy$ .

Le relazioni tra gli sforzi proiettati e gli sforzi di membrana sono:

$$\bar{n}_x = n_x \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \quad (4)$$

$$\bar{n}_y = n_y \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad (5)$$

$$\bar{t} = t \quad (6)$$

Considerando le espressioni (1), (2) e (3) si può osservare che, in sostanza, si hanno due strade atte a risolvere il problema di progetto:

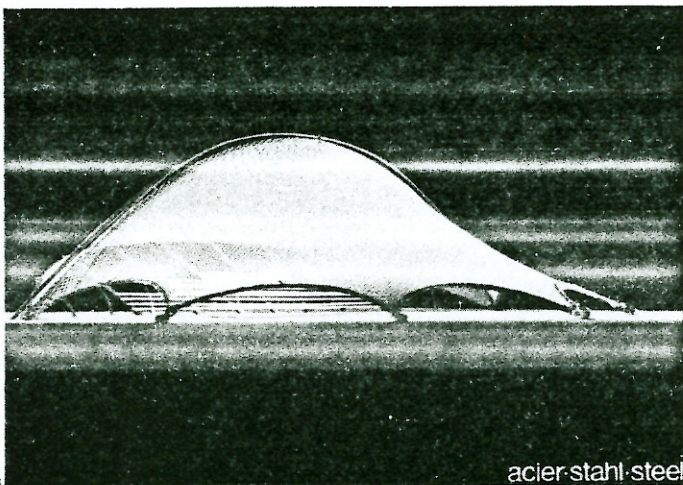


Fig. 1. Modello di una struttura spaziale leggera il cui equilibrio statico è da ricercare secondo i dati del presente articolo.

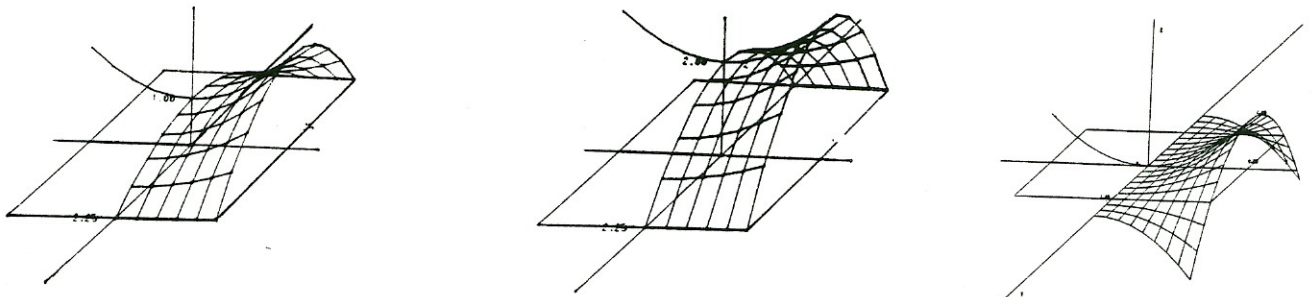


Fig. 2. Superfici a doppia curva negativa, ottenute successivamente al video secondo il metodo interattivo, cambiando il rapporto tra l'altezza e la larghezza.

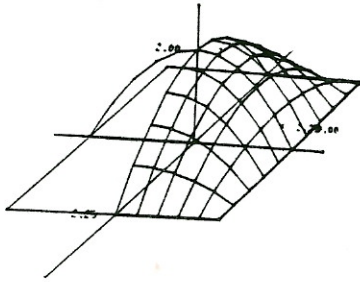


Fig. 3. Superfici a doppia curva positiva, prevista come soluzione possibile per una struttura pneumatica a pianta quadrata.

a) E' nota la superficie  $z = f(xy)$  e si desidera ottenere lo stato di sollecitazione.

Questo tipo di procedimento richiede che la geometria della struttura possa essere considerata immutabile. A parte considerazioni sulla stabilità dell'equilibrio, in questo caso il problema è concentrato nella verifica dello stato di sollecitazione membranale, pensando che la forma della struttura e le condizioni di carico legittimino la trascurabilità delle azioni flessionali.

Quando la struttura presa in esame è costituita da materiale resistente solo a trazione (tensostrutture, strutture pneumatiche, ecc.), la superficie data deve permettere inoltre di verificare la condizione:

$$n_{\min} = \frac{1}{2} [n_x + n_y \pm \sqrt{(n_x - n_y)^2 + 4t^2}] \geq 0 \quad (7)$$

E' evidente che solamente in casi molto semplici è possibile trovare delle superfici esprimibili analiticamente con facilità che soddisfino la (7) (per es. la sfera è una superficie pneumatica perfetta). Nel caso di condizioni arbitrarie al contorno ed in mancanza di simmetria radiale, è presso a poco impossibile definire una superficie compatibile con la (7).

Nella figura 2 è illustrata una sequenza interattiva di una funzione  $z = f(xy)$  a doppia curvatura opposta, atta a soddisfare la (7). Nella figura 3 è stato visualizzato un tentativo per la ricerca di una superficie atta a soddisfare la (7) in presenza di pressione interna.

b) E' noto il regime degli sforzi e si chiede alle equazioni di equilibrio di fornirci la geometria della superficie equilibrata.

Nei casi che frequentemente ricorrono nella pratica del progettista, l'equazione (3) legata ovviamente alla (1), (2), si presenta, considerando quale funzione incognita la  $z = f(x, y)$ , come un'equazione differenziale quasi lineare alle derivate parziali del secondo ordine a coefficienti variabili.

L'equazione (3) alle derivate parziali è perciò classificabile come iperbolica, parabolica od ellittica, a seconda che il suo discriminante ( $t^2 - \bar{n}_x \bar{n}_y$ ) sia maggiore, uguale o minore di zero.

Notando inoltre che il segno del discriminante ( $t^2 - \bar{n}_x \bar{n}_y$ )

è invariabile rispetto a qualsiasi trasformazione di coordinate reali continue e differenziabili con jacobiano  $\neq 0$ , possiamo passare a un sistema di coordinate curvilinee coincidenti con le direzioni principali degli sforzi ( $t = 0$ ). In questo riferimento abbiamo perciò che l'equazione differenziale alle derivate parziali è

- iperbolica se  $\bar{n}_x \bar{n}_y < 0$
- parabolica se  $\bar{n}_x \bar{n}_y = 0$
- ellittica se  $\bar{n}_x \bar{n}_y > 0$ .

Dalla classificazione precedente si può trarre che per le strutture a superficie iperbolica ( $\bar{n}_x \bar{n}_y < 0$ ) avremo che gli sforzi saranno di segno opposto; per le superfici paraboliche in una delle direzioni principali avremo sforzo nullo (coni e cilindri) e che per le superfici ellittiche gli sforzi sono dello stesso segno. Queste condizioni sui coefficienti dell'equazione differenziale definiscono un ben determinato regime di sforzi interni per la generica funzione incognita  $z = f(x, y)$ . Nel nostro caso, avendo fissato a priori il valore e il segno dei coefficienti  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}_x$ ,  $\bar{n}_y$  (che definiscono lo stato di sollecitazione interna della membrana), possiamo prevedere il tipo di superficie incognita classificabile come iperbolica, parabolica od ellittica dai coefficienti variabili  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}_x$  e  $\bar{n}_y$ .

Agendo su questi coefficienti, possiamo definire la superficie strutturale più conveniente per la realtà costruttiva alla quale è destinata.

Dal punto di vista geometrico è importante notare che, considerando  $K = k_1 \cdot k_2$ , la curvatura gaussiana, la superficie strutturale è:

- iperbolica se  $k_1 k_2 < 0$
- parabolica se  $k_1 k_2 = 0$
- ellittica se  $k_1 k_2 > 0$ .

## 1.2. Differenti forme assunte dall'equazione (3) in particolari condizioni di carico e regime di tensione

a) Membrana presollecitata con carichi esterni nulli

In tal caso l'equazione (3) assume la forma:

$$\bar{n}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \bar{n}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2t \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8)$$

e nell'ipotesi di considerare  $\bar{n}_x = \bar{n}_y$ , e  $\bar{t} = 0$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

equazione che evidenzia la caratteristica iperbolica ( $k_1 k_2 < 0$ ) della superficie geometrica soluzione della (9), imposta dal forzato regime ellittico degli sforzi ( $\bar{n}_x \bar{n}_y > 0$ ). L'introduzione di uno stato di coazione interno, per es. di presollecitazione, può cambiare il regime di sforzi da ellittico a iperbolico ( $\bar{n}_x \bar{n}_y < 0$ ) in una struttura ancora geometricamente iperbolica ( $K < 0$ ). Questo è il caso tipico delle tensostrutture dove si introduce una presollecitazione di trazione garante della stabilità della struttura stessa.

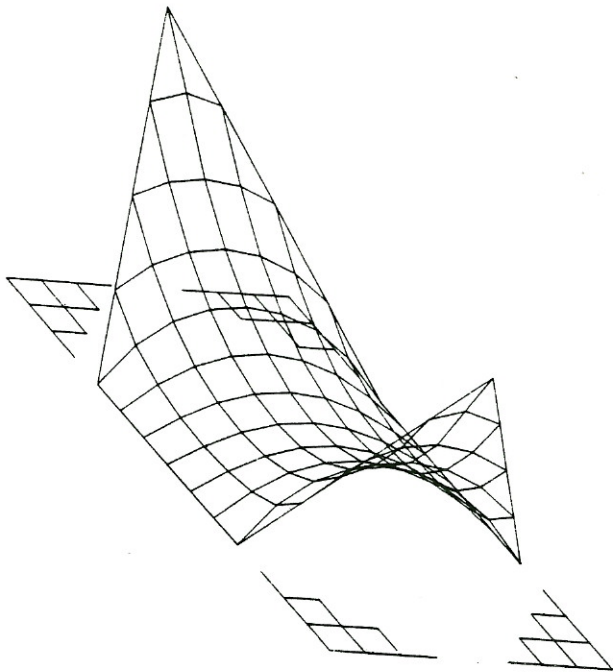


Fig. 4. Membrana a superficie minima su contorno esagonale.

b) Membrana soggetta all'azione del peso proprio e di pressioni accidentali verticali

L'equazione (3) diventa, considerando la direzione  $z$  verticale,

$$\begin{aligned} -n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2t \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \\ = -p_p - p_c \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

dove:  $p_p$  = peso proprio della membrana,  
 $p_c$  = carichi accidentali con direzione  $z$ .

c) Superfici minime

Una superficie a minima area è una superficie per la quale la curvatura principale ( $H$ ) è nulla in ogni suo punto. Ricordando che in un riferimento cartesiano ( $x, y, z$ ) l'espressione della curvatura principale è:

$$\begin{aligned} H = \\ - \left[ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left[ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

e che l'equazione di membrana per stato uniforme di tensione ( $n_0$ ) soggetta all'azione del peso proprio, azione esterna ripartita e a pressione interna (strutture pneumatiche) è data dalla:

$$\begin{aligned} 2(n_0 + p_p z) H = \pm [p + \gamma(z_0 - z)] + \\ - p_p \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (12)$$

$\gamma$  = peso specifico del liquido

otteniamo che, per  $p_p = \gamma = 0$ , la curvatura acquista il valore costante  $H = \pm p/(2n_0)$  e che la superficie risulta minima se è anche  $p = 0$ . Pertanto una superficie a minima area può essere ottenuta in assenza di carichi e in stato uniforme di tensione.

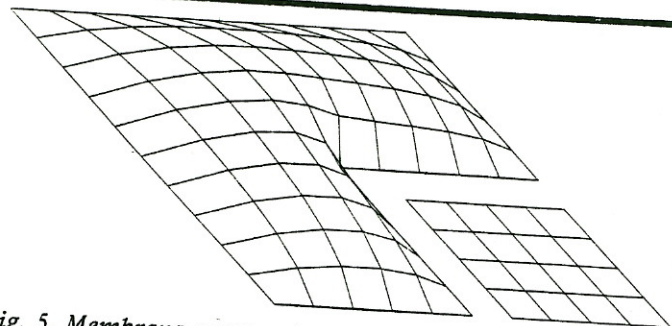


Fig. 5. Membrana sottoposta ad una pressione interna, con  $n =$  costante.

Nella figura 4 è visualizzata la superficie minima su contorno di sei lati.

d) Strutture a membrana sottoposte a pressione interna  
L'equazione « di membrana », che permette di trovare la configurazione geometrica equilibrata della struttura, si presenta nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{p}{n_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Nel caso che venga tenuto conto del peso proprio della membrana, il termine a destra dell'uguaglianza cambia e diventa:

$$\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{n_0}{p_p} + z} \quad (14)$$

Nella figura 5 è rappresentata la superficie della membrana soggetta a pressione interna ( $p/n = 0,2$ ).

### 1.3. La risoluzione numerica

L'equazione (3) e tutte le sue trasformazioni possono essere scritte alle differenze finite. In questo modo, invece di risolvere un'equazione differenziale, la soluzione approssimata viene fornita da un sistema di equazioni in genere non lineari.

L'espressione (8), scritta per il generico nodo interno ( $i, j$ ) alle differenze finite si presenta la forma seguente:

$$\begin{aligned} Z_{i,j} \left[ 4 + \frac{1}{2 \cdot h^2} (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 + \frac{1}{2 \cdot h^2} (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \right] = \\ = Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j} + Z_{i+1,j} + \frac{1}{4 \cdot h^2} (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2 \cdot \\ \cdot (Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1}) + \frac{1}{4 \cdot h^2} (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1})^2 \cdot (Z_{i-1,j} + Z_{i+1,j}) - \\ - \frac{1}{8 \cdot h^2} (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) \cdot (Z_{i,j+1} - Z_{i,j-1}) \cdot \\ \cdot (Z_{j+1,i-1} + Z_{j-1,i+1} - Z_{j-1,i-1} - Z_{j+1,i+1}) \end{aligned} \quad (15)$$

Le condizioni al contorno sono invece espresse, generalmente, dando le coordinate dei punti esterni di frontiera, considerati fissi.

Altri tipi di condizioni al contorno possono essere espressi tenendo conto delle caratteristiche iperboliche o ellittiche dell'equazione differenziale.

Per quanto riguarda il metodo iterativo, scelto per la risoluzione del sistema di equazioni costituito dalla (15) scritta per tutti i nodi interni, è stato adottato il metodo di Gauss-Seidel per l'espressione che governa il funzionamento delle membrane presollecitate in assenza di carichi e per le superfici minime. Nel caso di membrane soggette a carichi, come le strutture pneumatiche, il me-

todo di Gauss fornisce in genere una debole convergenza. E' allora opportuno risolvere questo tipo di strutture con il metodo esposto nel paragrafo 2.

## 2. MEMBRANE CON CONTORNI MOBILI

Nel caso che la membrana sia dotata di una frontiera, costituita solo da punti discreti, le equazioni (1), (2) e (3) non sono in genere più utilizzabili allo scopo di ottenere una soluzione al problema della ricerca della configurazione geometrica. In questo caso è conveniente partire considerando un insieme discreto di nodi e di fittizie aste, nonché imporre nello spazio l'equilibrio della rete che verrà così a formarsi.

L'equilibrio del generico nodo  $k$ , dove confluisce un numero  $m_k$  di aste, nella fase 0 in cui si supponga nota la geometria, è espresso scalarmente dalle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{m_k} \frac{S_{ki}^0}{L_{ki}^0} \Delta x_{ki}^0 = p_{xk}^0 \\ \sum_1^{m_k} \frac{S_{ki}^0}{L_{ki}^0} \Delta y_{ki}^0 = p_{yk}^0 \\ \sum_1^{m_k} \frac{S_{ki}^0}{L_{ki}^0} \Delta z_{ki}^0 = p_{zk}^0 \end{array} \right. \quad (16)$$

dove:

$$\Delta x_{ki}^0 = x_k^0 - x_{ki}^0, \quad \Delta y_{ki}^0 = y_k^0 - y_{ki}^0, \quad \Delta z_{ki}^0 = z_k^0 - z_{ki}^0$$

$$L_{ki}^0 = \sqrt{(\Delta x_{ki}^0)^2 + (\Delta y_{ki}^0)^2 + (\Delta z_{ki}^0)^2}$$

$x_k^0, y_k^0, z_k^0$  = coordinate del punto interno generico  $k$  nella fase 0,

$S_{ki}^0$  = sforzi nell'asta  $ki$  nella fase 0,

$L_{ki}^0$  = lunghezza dell'asta  $ki$  nella fase 0,

$p_{xk}^0, p_{yk}^0, p_{zk}^0$  = componenti del carico nella fase 0 secondo le direzioni  $x, y$  e  $z$  rispettivamente.

Le relazioni (16) vengono scritte per ogni nodo interno dandoci così  $3n$  equazioni, essendo  $n$  il numero di nodi interni « liberi ». In maniera compatta il sistema di equazioni può venire scritto:

$$[A]\{S\} = \{P\} \quad (17)$$

dove  $S$  è il vettore degli sforzi,  $A$  è la matrice dei coseni direttori degli elementi (aste) e  $P$  è il vettore dei carichi. Le incognite globali del problema sono gli  $m_k$  valori degli sforzi  $S_{ki}$  nelle aste e le  $3n$  coordinate dei nodi interni.

La risoluzione, in ordine pratico, del nostro sistema di equazioni di equilibrio, può essere affrontata in diversi modi a seconda delle quantità scelte come incognite.

Possiamo così seguire due vie:

a) nel caso che la geometria della superficie strutturale non sia nota,

b) nel caso che la geometria della superficie strutturale sia nota.

### a) Geometria della struttura incognita

Le equazioni (16) possono essere risolte, una volta fissati gli sforzi  $S_{ki}$  nelle aste, richiedendo da un sistema di  $3n$  equazioni non lineari le  $3n$  incognite coordinate dei nodi. Questo tipo di risoluzione è opportuno per la ricerca della configurazione geometrica iniziale, quando le condizioni al contorno sono libere, ma incontra difficoltà nella risoluzione numerica, data la non linearità frequentemente marcata del sistema da risolvere.

Per facilitare la convergenza del procedimento iterativo (Newton-Raphson), un primo valore delle coordinate dei nodi può essere ottenuto dando dei valori arbitrari al rapporto  $S_{ki}/L_{ki} = q_{ki}$ . In questo modo si risolve un sistema

lineare di equazioni ricavando i valori della prima iterazione con la possibilità di ottenere una notevole accelerazione della convergenza se i valori iniziali impressi sono appropriati.

Il metodo iterativo usato per risolvere le equazioni di equilibrio prosegue poi nella maniera nota: ottenuto il primo risultato con la risoluzione del sistema linearizzato:

$$[\Delta]\{q\} = \{p\},$$

dove con  $[\Delta]$  si è indicata la matrice formata dalle differenze  $\Delta x_{ki}^0; \Delta y_{ki}^0; \Delta z_{ki}^0$  e con  $q_{ki} = S_{ki}/L_{ki}$  il rapporto tra forza e lunghezza dell'asta  $ki$ , si passa alla fase iterativa con a disposizione il primo set di soluzioni ( $x^0, y^0, z^0, S^0, L^0$ ).

Le ulteriori iterazioni sono ottenute col metodo delle successive sostituzioni. Con questo metodo il vettore dei carichi viene incrementato a passo a passo e i termini non lineari vengono aggiornati ad ogni iterazione. In una iterazione ( $r$ ) generica si avrà:

$$[A]^r\{S\} - \{P\} = \{\Delta P\}^r$$

La sequenza iterativa viene continuata fino a quando lo squilibramento  $\{\Delta P\}^r < \varepsilon$ .

Nella pratica corrente sono frequenti dei vincoli di progetto nella definizione della rete formata dalle aste. Le condizioni restrittive più frequenti sono quelle di imporre sforzi o lunghezze costanti in un insieme di aste.

Nel caso specifico di una rete di funi significa avere delle funi dimensionate all'ottimo della resistenza nel caso di prescrizione di sforzi costanti lungo una linea e di prefabbricazione agevolata e facilità di montaggio nel caso di lunghezze costanti.

Se dopo aver ottenuto la geometria e lo stato di sollecitazione desiderati si vuole introdurre delle condizioni restrittive sugli sforzi o sulle lunghezze delle aste cambiando il minimo possibile la geometria stessa di partenza, un metodo vantaggioso è quello di trovare la soluzione di compromesso mediante programmazione non lineare del quale diamo soltanto un cenno col proposito di riprendere l'argomento.

Considerando di introdurre  $r < m$  condizioni sulle lunghezze e sugli sforzi di  $r$  aste il problema di programmazione non lineare può essere presentato come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variabili: } [x, y, z, S] \\ \text{funzione obiettivo:} \\ f = \Sigma[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] \rightarrow \min; \\ \text{vincoli: } g(x, y, z, S) = 0; S > 0 \end{array} \right.$$

dove  $x, y, z$  coordinate dei nodi (incognite);

$x_0, y_0, z_0$  coordinate dei nodi nella situazione iniziale nota;

$S$  sforzo nelle aste.

La funzione obiettivo ed i vincoli sono non lineari rispetto alle variabili e perciò la soluzione viene trovata mediante una sequenza di minimizzazione con l'opportuna scelta della funzione di penalizzazione.

I vincoli sono rappresentati dalle  $3n$  equazioni di equilibrio e dalle  $r$  condizioni imposte agli sforzi ed alle lunghezze delle aste.

### b) Geometria della struttura nota

In questo caso sono note le  $3n$  coordinate dei nodi. Progettualmente significa che la geometria strutturale è stata definita per motivi di ordine architettonico. Usualmente una superficie così definita non soddisfa le condizioni di equilibrio. La soluzione del problema consisterà nel trovare la superficie equilibrata più vicina a quella di progetto.

Conosciuta perciò la matrice  $[A]$  nella (17) abbiamo come incognita il vettore  $\{S\}$  degli sforzi nelle aste. In questo modo approdiamo ad un sistema di  $3n$  equazioni con  $m$  incognite con  $3n > m$ .

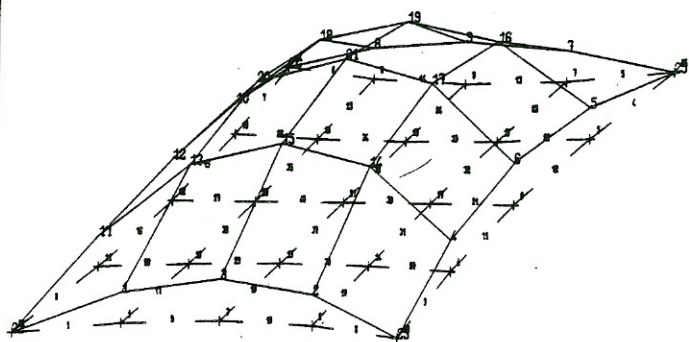
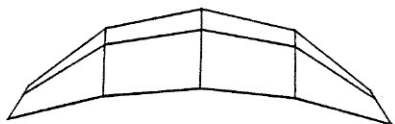
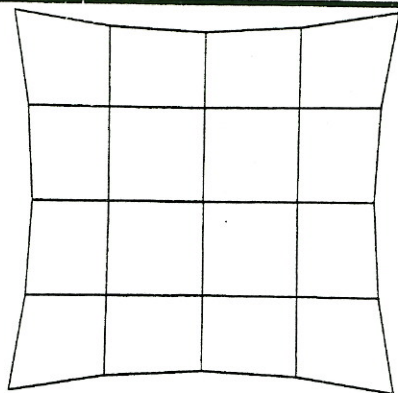


Fig. 6. Membrana ancorata in quattro punti. I carichi applicati ai nodi interni sono diretti secondo l'asse delle  $z$ . La lunghezza delle aste è costante.

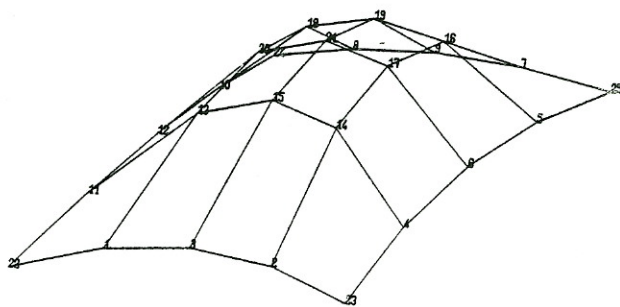
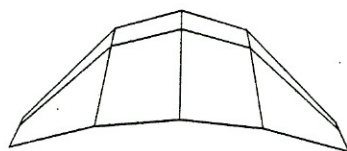
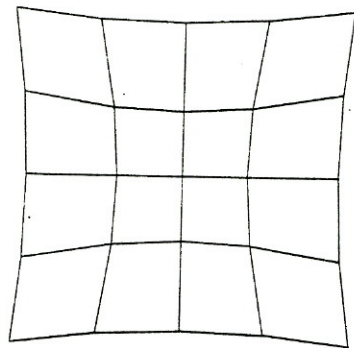


Fig. 7. Membrana sottoposta alle stesse condizioni della figura 6, ma con costanza degli sforzi nelle aste.

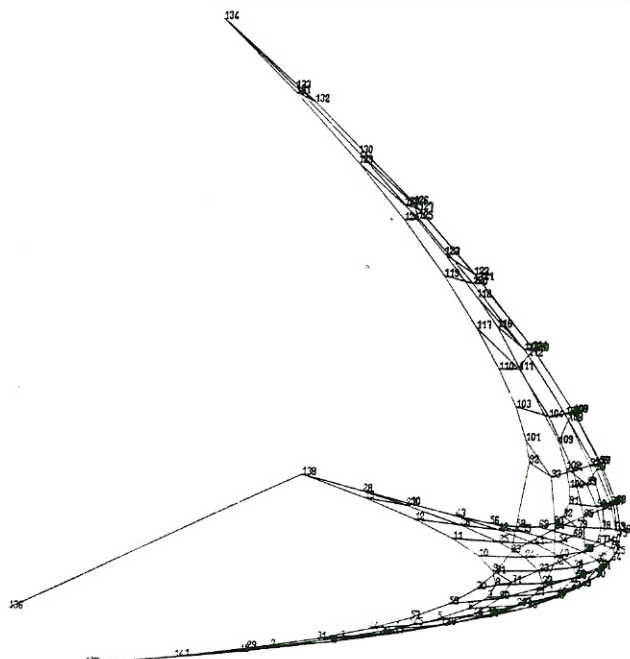


Fig. 8. Vela ancorata in tre punti e sottoposta a carichi diretti secondo l'asse delle  $x$ .

Questo sistema non ammette generalmente una univoca soluzione a meno di avere  $3n - m$  equazioni linearmente dipendenti e perciò il rango della matrice  $[A]$  di ordine  $m$ . Anche di questo procedimento ci limitiamo per ora a un cenno. Cerchiamo ora come esposto in a), una soluzione

di primo tentativo, ottenendo così un primo set di valori per gli sforzi nelle aste contenuti nel vettore  $\{S\}$ . Il vettore  $\{S\}$  non potrà soddisfare però le condizioni di equilibrio associate alla matrice  $[A]$  nota dei coseni direttori e perciò esisterà uno squilibramento  $\{\Delta P\}$  nei nodi dove

$$\{\Delta P\} = [A] \cdot \{S\} - \{P\} = 0. \quad (18)$$

Il valore del vettore degli sforzi  $\{S\}$  che associato alla matrice  $[A]$  soddisferà numericamente l'equilibrio, può essere ottenuto minimizzando lo scarto  $\{\Delta P\}$  con il metodo dei minimi quadrati. Ottenuto il valore di  $\{S\}$  che minimizza  $\{\Delta P\} \cdot \{\Delta P\}$  la geometria definitiva della superficie può essere ottenuta con il metodo esposto in a). Allo stesso risultato si può arrivare direttamente mediante la seguente formulazione in termini di programmazione matematica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variabile: } [x, y, z, S]; \\ \text{funzione obiettivo:} \\ \quad \Sigma [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \rightarrow \min; \\ \text{vincoli: } g(x, y, z, S) = 0; S > 0. \end{array} \right.$$

La funzione obiettivo rispecchia la richiesta di base di soddisfare il più vicino possibile la geometria di partenza. I vincoli sono rappresentati dalle equazioni di equilibrio.

### c) Risultati numerici

Le figure 6 e 7 rappresentano le disposizioni assunte dalla rete di aste con appoggio in quattro punti, avendo richiesto rispettivamente lunghezza costante e sforzi costanti nelle aste interne.

La figura 8 illustra la posizione d'equilibrio di una vela ancorata su tre punti, soggetta ad un carico costantemente diretto.

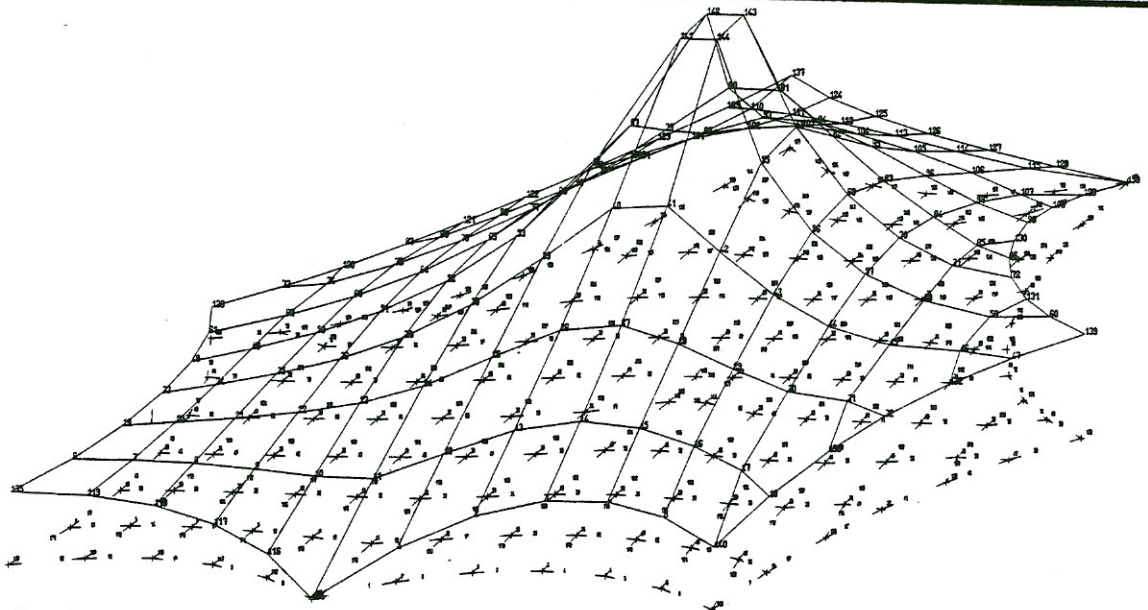


Fig. 9. Plotterizzazione della geometria allo stato 0 (zero) per una membrana presollecitata ancorata in alcuni punti.

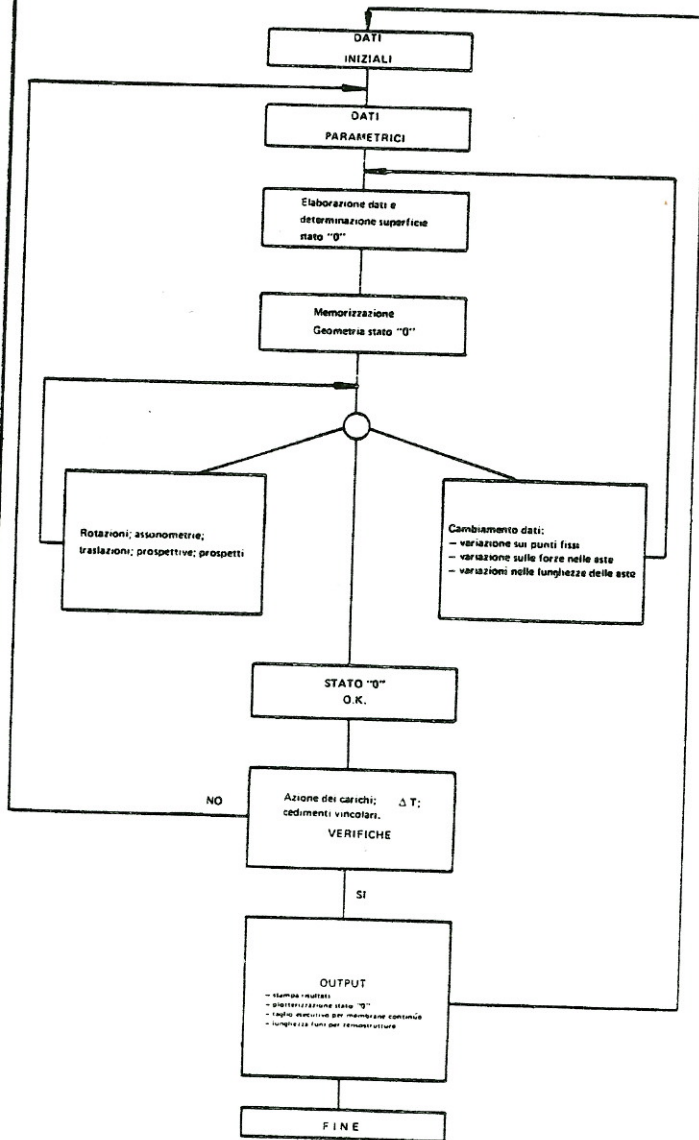


Fig. 10. Diagramma di un programma di calcolo elettronico interattivo.

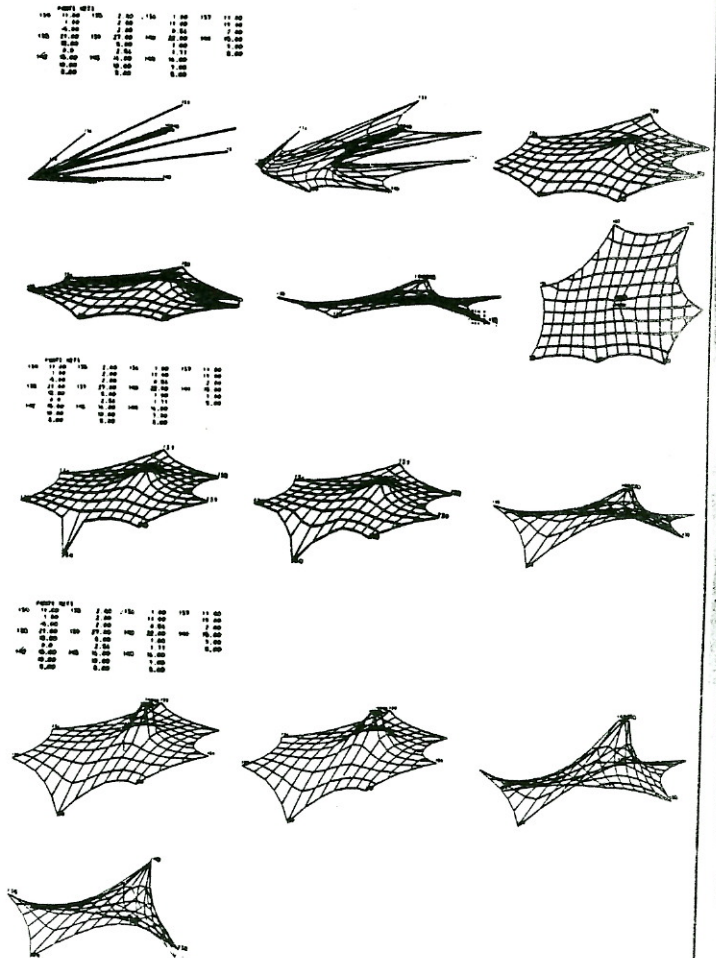


Fig. 11. Fasi successive della determinazione dell'equilibrio di una membrana con il metodo interattivo (Video-display Console IBM 2250). Da sinistra a destra e dall'alto in basso: (1) Coordinate dei punti d'ancoraggio. (2) e (3) Visualizzazione del calcolo interattivo. (4) Convergenza raggiunta. (5) e (6) Rotazioni. (7) Vista in pianta. (8) e (9) Cambiamento di un punto di ancoraggio. (10) Nuova forma di equilibrio. (11) Rotazione. (12) e (13) Cambiamento delle coordinate dei punti più alti. (14) Nuova forma di equilibrio. (15) Rotazione. (16) I quattro punti più alti sono ridotti ad uno solo.

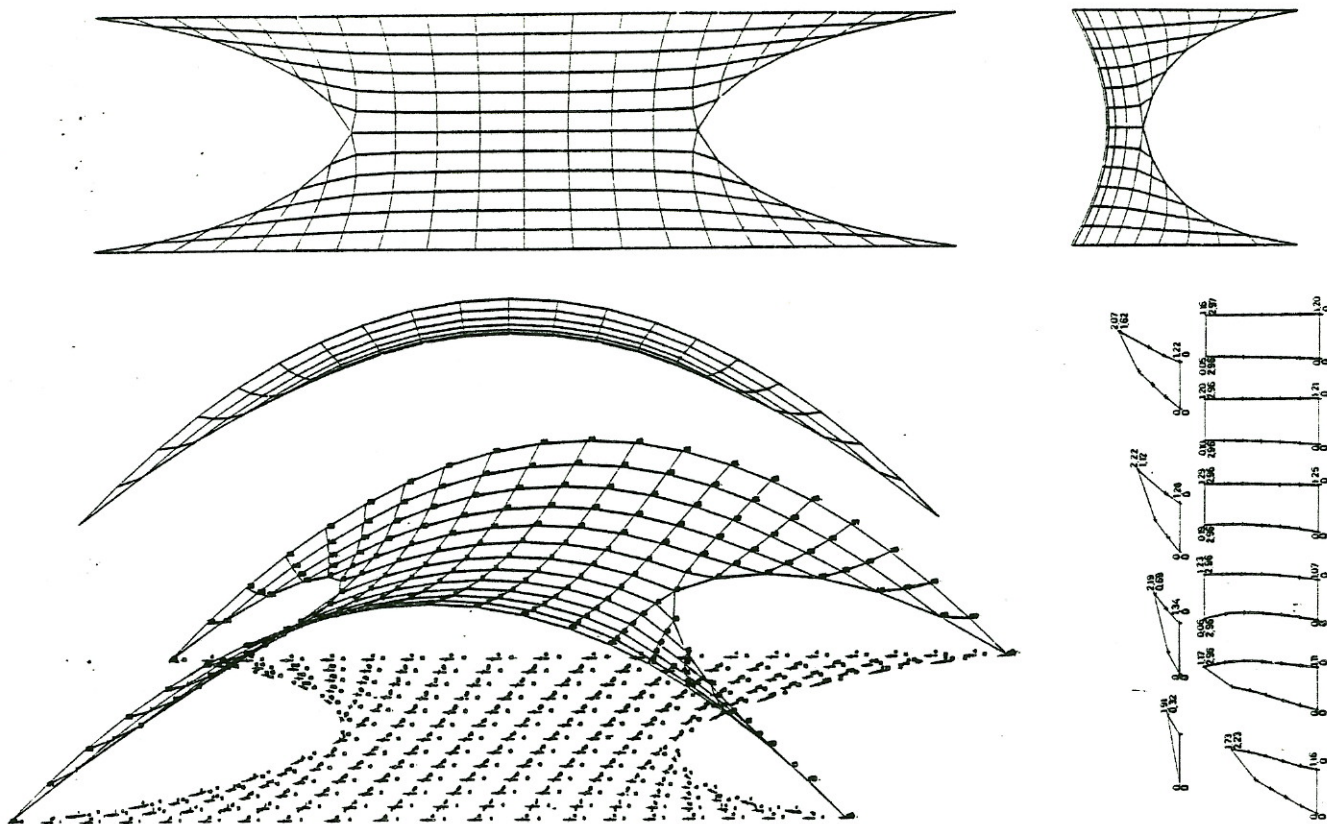


Fig. 12. Vista in pianta, in alzato e assonometrica ottenute a seguito dell'elaborazione interattiva del progetto di una struttura spaziale presollecitata. In basso, a destra: disegno automatico delle diverse sagome piane che, assemblate, formeranno la copertura.

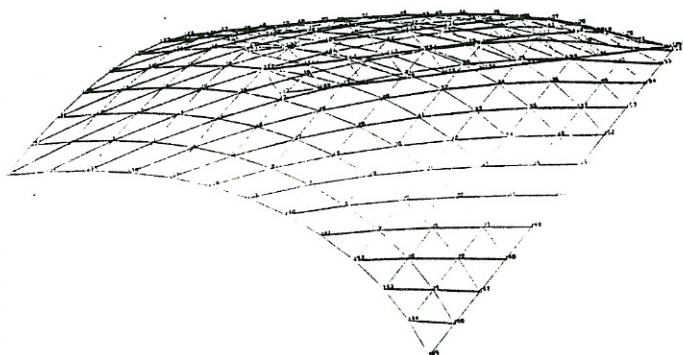


Fig. 13. Prospettiva assonometrica del quarto di una struttura pneumatica su pianta quadrata di 32 m di lato.

Una struttura con notevole numero di nodi e aste, ancorata in 7 punti esterni a diverse quote e con sostegno interno, è visualizzata in assonometria (fig. 9).

### 3. LA PROGETTAZIONE INTERATTIVA CALCOLATORE-INGEGNERE

Nella ricerca delle superfici delle membrane e di notevole aiuto per la progettazione ottenere i risultati (output) plotterizzati dal calcolatore, rendendo così immediatamente visibile il risultato dei calcoli compiuti.

Un vantaggio ancora maggiore è ottenibile usando un video-display che permette di visualizzare istantaneamente, mediante cinescopio, quando un programma invia in output. Il vantaggio di una tale dispositivo è notevole se l'organizzazione strutturale del programma gode di un'appropriata organizzazione bidirezionale (può cioè ricevere informazioni e fornire risultati).

Un programma elettronico « strutturato bidirezionalmente » durante l'esecuzione delle operazioni che elaborano, i valori noti può interrompere momentaneamente il calcolo, apportare modifiche ai dati e ripartire elaborando i nuovi

valori. Perché un tale programma possa funzionare, deve poter essere introdotto in un calcolatore interattivo, tale cioè che consenta di agire dall'esterno intervenendo su di esso quando lo si ritenga opportuno, secondo una tipica operazione di correzione, tentativo o verifica progettuale. I calcolatori corredati di tali programmi non sono più solo degli strumenti passivi, ma assumono la possibilità di essere interattivi in senso progettuale. Il video-display diviene così il prolungamento strumentale e mentale dell'operatore, aumentando enormemente la capacità, qualità e velocità di progettazione e offrendo inoltre la possibilità di trovare facilmente la soluzione ottimale. Con il diagramma a blocchi della figura 10 si è schematizzato il funzionamento interattivo del programma di calcolo.

Per illustrare una sequenza interattiva, nella figura 11 è stato visualizzato sul video un tipo di struttura, modificata secondo le esigenze del progetto. La sequenza illustra la ricerca della superficie in equilibrio ancorata a punti discreti a differenti altezze.

Nelle sequenze sono visualizzate alcune fasi interattive del calcolo, la scelta finale della forma geometrica con eventuali rotazioni e le plotterizzazioni su carta, ottenute dopo il soddisfacimento dei requisiti richiesti. Su plotter si è ottenuta anche la graficazione delle sagome dei teli piani che, assemblati, formeranno la superficie spaziale non sviluppabile della struttura (fig. 12).

### BIBLIOGRAFIA

- [1] Wilhelm Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer-Verlag, 1962.
- [2] A. Pucher, « Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen », *Beton U. Eisen*, Bd. 33, 1934.
- [3] L. Gruendig, H. L. Schek, « Analytical form finding and analysis of prestressed cable networks », Int. Conference on Tension Roof Structures, Londra, 1974.
- [4] E. Shaviv, *Continuous Modular Surface Structure: A Computer Graphics Approach*.
- [5] R. Trostel, F. Otto, *Zugbeanspruchte Konstruktionen I*.