

ANALISI INTERATTIVA DI TENSOSTRUTTURE A RETE

Ing. Massimo Majowiecki,
Istituto di Tecnica delle Costruzioni,
Facoltà di Ingegneria
dell'Università di Bologna

Sommario

I metodi di progetto e di verifica di strutture che lavorano essenzialmente in regime di membrana, interessano ampi campi applicativi e tipologie strutturali quali: linee elettriche aeree, funivie, linee di trasporto sospese, stralli per antenne, ancoraggi di piattaforme galleggianti, tubazioni sottomarine, dighe pneumatiche, serbatoi, silos, torri di raffreddamento, palloni idro-pneumatici per recupero marino, ponti strallati e sospesi, coperture ed edifici sospesi, coperture a membrane pneumatiche o presollecitate, tensostrutture, ecc.

Con la presente nota si intende individuare un sistema generale di calcolo automatico con il quale sia possibile condurre l'analisi statica e dinamica, associata all'attività di progetto e verifica strutturale.

Il sistema di calcolo è supportato da una efficiente organizzazione hardware e software di tipo interattivo grafico (C.A.D.).

1. Premessa

La moderna letteratura tecnica relativa alle membrane reticolari monostrato a semplice o doppia curvatura, è indirizzata verso l'analisi delle seguenti problematiche strutturali:

- ricerca della forma - definizione dello stato «0»;
- non linearità geometrica e materiale;
- unilateralità degli sforzi;
- contatto unilaterale discreto e continuo;
- viscoelasticità;
- creeping a corta e lunga durata;
- effetti dinamici indotti dal vento;
- collaborazione con strutture di ancoraggio;
- analisi anelastica ed instabilità;
- stati limite ultimi e di esercizio;
- collasso critico ad alte temperature;
- prove sperimentali;
- tecnologie costruttive.

L'indagine analitica relativa a questi argomenti è resa possibile da potenti mezzi di calcolo numerico ed ha quale obiettivo principale la individuazione di un modello fisico-matematico della struttura che schematizzi la realtà costruttiva nel modo più preciso possibile.

L'analisi del «modello fisico-matematico» può essere eseguita avvalendosi di due metodi generali: il metodo degli spostamenti ed il metodo delle forze.

Il metodo degli spostamenti, principalmente per la sua facilità di codificazione, è stato impiegato molto più frequentemente nell'ambito dell'analisi automatica delle strutture. La generalità dei codici elettronici «multi-purpose» è infatti scritta nell'ambito del metodo degli spostamenti.

Nel campo di ricerca che ci interessa la tentazione di appoggiarsi al metodo degli spostamenti, già collaudato nell'analisi elastica lineare delle strutture, è stata molto forte. La quasi totalità delle pubblicazioni scientifiche relative all'argomento in oggetto si basa sul metodo degli spostamenti [1-7], mentre il metodo delle forze [8] viene generalmente accantonato soprattutto per la difficoltà di programmazione automatica.

L'adozione del metodo degli spostamenti provoca, come vedremo, difficoltà di calcolo numerico spesso insormontabili, specialmente in campo di grandi deformazioni.

Dal punto di vista del calcolo numerico la maggior parte degli autori si basa su metodi «diretti» iterativi o incrementali a formulazione matriciale (metodo di Newton-Raphson e similari) o iterativi per vettori quali il metodo dei gradienti coniugati e metodi di rilassamento statico o dinamico. In maniera più modesta si vedono applicare metodi iterativi «indiretti» quali il metodo di Gauss-Seidel o i metodi di programmazione matematica legati ai metodi di minimizzazione dell'energia potenziale totale del sistema strutturale.

Un interessante paragone tra metodi iterativi diretti e il metodo a formulazione matriciale è illustrato in [9].

L'attenzione dei ricercatori, come si può considerare dalle note sopra indicate, è stata indirizzata alla determinazione di un «modello fisico-strutturale» o «struttura principale» (definibile il metodo degli spostamenti); ed all'esame dei metodi numerici relativi.

A quest'ultimo problema vengono dedicati gli spazi maggiori, arrivando molte volte al punto di scambiare, nell'ambito

della ricerca scientifica, il «problema matematico» come il «problema strutturale»; il «codice di calcolo» con la «struttura», il «mezzo» con le «finalità».

L'analisi numerica del problema prende così il sopravvento, arrivando quasi al compiacimento della complicazione fine a se stessa. Un grande numero di articoli è dedicato all'esame degli inconvenienti numerici frequentemente incontrati quali: instabilità numerica, convergenza alla soluzione, rounding errors, truncation errors, mal condizionamento del sistema di equazioni, ecc. Per far fronte a questo problema vengono suggerite sofisticate tecniche numeriche iterative, incrementali, di over-under relaxation, manipolazioni di coefficienti della matrice di rigidezza, ecc.

L'interpretazione più attenta delle caratteristiche fisico-meccaniche della struttura poteva evitare la maggior parte degli inconvenienti numerici sopra menzionati senza obbligare ad ovviare, disperatamente, con notevoli sofisticazioni in campo numerico, ai compromessi fatti in sede di scelta di metodo o della «struttura principale» più vicina al comportamento fisico reale della struttura.

L'obiettivo di questa nota è quello di individuare una strategia di calcolo numerico, ovvero un «modello matematico» che tenga conto in maniera ponderata delle caratteristiche funzionali delle strutture a membrana in campo di grandi deformazioni, in modo da evitare al massimo gli inconvenienti numerici sopra menzionati che rispecchiano, generalmente, un errore di interpretazione in sede di ipotesi funzionali fisico-meccaniche della struttura.

2. Esame delle caratteristiche fisico-meccaniche dei gusci in regime di membrana - Problemi correlativi di risoluzione numerica

Le membrane presentano le seguenti caratteristiche di comportamento fisico-meccanico:

- Non linearità geometrica: le membrane presollecitate e non presentano spesso schemi strutturali ipostatici, con ampia possibilità di spostamenti anche di tipo geometrico, associati a piccole dilatazioni. Sotto carico il comportamento globale delle strutture è tipicamente di «hardening». Localmente, invece, è frequente osservare che parte della struttura lavora in «hardening», mentre altre zone lavorano contemporaneamente in «softening».
- Non linearità materiale: il comportamento di alcuni tipi di funi di acciaio con modulo elastico non stabilizzato, di funi di poliestere ad alta resistenza, di membrane in gomma sintetica, presenta diagrammi costitutivi del materiale con variazioni di tipo «hardening» e «softening» molto marcati rendendo, perciò, necessaria la relativa schematizzazione analitica.
- Collaborazione con strutture a rigidezza differenziale molto elevata: le strutture in funi molto sovente sono collegate a strutture con rigidezze relative molto differenti (piattaforme marine, tensostrutture per coperture collaboranti con strutture d'ancoraggio ad anello, ecc.). All'interno stesso della struttura in funi è sovente possibile trovare elementi o sottostrutture, considerevolmente più rigide di altre.
- Contatto unilaterale: in caso di impiego di funi per ancoraggio di piattaforme marine, è classico il problema di contatto della fune sul fondo in funzione di notevoli movimenti (variazione di stato) agli ancoraggi (strutture di bordo).
- Creeping a corto e lungo termine: strutture eseguite con materiali plastici debbono essere analizzate tenendo in considerazione le variazioni delle caratteristiche meccaniche del materiale in funzione del tempo e dello stato di deformazione e tensione differita.

Dal punto di vista numerico le difficoltà maggiori che si trovano nell'analisi delle strutture in regime di membrana sono:

- Equazioni mal condizionate, con conseguenti errori di precisione e non convergenza iterativa in campo non lineare.

- Risoluzione di alto numero di incognite, con conseguenti errori accumulati (rounding errors).

- Compatibilità del problema fisico da risolvere con la precisione di macchina, specialmente in caso di impiego di minicomputers (truncation errors).

- Minimizzazione nell'impiego di memorie «out of core» direttamente legato al costo di calcolo.

La causa maggiore del mal condizionamento è l'esistenza, all'interno della struttura, di un elemento o regione di grande rigidezza collegati ad elementi o regioni di modesta rigidezza.

Nelle membrane a doppia curvatura questo fatto accade frequentemente ed è presente addirittura per ogni nodo; basti pensare alla notevole rigidezza, nei gusci ribassati, in direzione X e Y ed alla modesta rigidezza in Z . Le tensostrutture a rete ancorate a strutture di bordo in c.a. sono notevoli esempi di mal condizionamento giacché la rigidezza relativa fra struttura di bordo e rete di fune è notevolmente alta.

Strutture elementari quali le funi libere nello spazio risultano notevolmente mal condizionate, in termini di matrice di rigidezza, da diventare singolari (ipostaticità).

Se, nell'ambito di una struttura, si trovano rapporti molto differenti fra le rigidezze degli elementi costitutivi, possono sussistere problemi di precisione nella risoluzione numerica. Questo accade impiegando calcolatori che lavorano con parole di pochi bits. Infatti vanno perdute, per troncamento, informazioni numeriche essenziali.

Le conseguenze di tutto ciò si avvertono ottenendo risultati con valori assurdi sugli spostamenti e sulle sollecitazioni: overflow per brusche diminuzioni di termini diagonali e, più sinteticamente, per notevole aumento del numero di condizionamento [10-11].

La misura di mal condizionamento numerico di una matrice di coefficienti $[K]$ è data dal «numero di condizionamento» $C(K)$ che è definito come:

$$C(K) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (1)$$

dove λ_{\max} e λ_{\min} sono il massimo ed il minimo autovalori di $[K]$ scalare che, a sua volta, è ottenuta come trasformazione di $[K]$ mediante matrici diagonali $[S]$:

$$[K_i] = [S][K][S], \quad S_{ii} = \frac{1}{\sqrt{K_{ii}}} \quad (2)$$

in modo da evitare un artificiale «numero di condizionamento».

Considerato il «numero di condizionamento» quale un rapporto di frequenze naturali della struttura con masse unitarie associate ad ogni grado di libertà, si ha che gli autovettori rappresentano i modi naturali di vibrare. In questa maniera λ_{\max} rappresenta il modo più rigido di deformazione e λ_{\min} rappresenta il modo più flessibile di deformazione.

Esprimendo ora $[K]$ come combinazione degli autovettori si ha:

$$[K] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{V_i\} \{V_i\}^T, \quad [K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \{V_i\} \{V_i\}^T \quad (3)$$

dove:

λ_i = il i -esimo autovalore

V_i = il corrispondente modo di vibrare.

Se la matrice dei coefficienti è formata secondo la prima delle (3) è possibile vedere che, aggiungendo i contributi singoli dei modi di vibrare in parole di calcolatore di lunghezza costante, l'informazione associata ai modi più lenti viene decurtata. Se si ricerca la $[K]^{-1}$ al contrario vengono decurtati i valori associati ai modi più rigidi di vibrare.

Da quest'ultima osservazione, che coincide con l'osservazione fisica della «struttura principale» associata ad ogni modo di vibrare, si può dedurre che l'effetto di troncamento può essere minimizzato associando il metodo dell'equilibrio per strutture con modi di vibrare «rigidi» e il metodo delle forze per strutture con modi di vibrare «flessibili».

Anche per il calcolo iterativo matriciale degli autovalori ed

autovettori di un sistema oscillante la convergenza del calcolo dipende dalla natura stessa dell'equazione dell'equilibrio o di compatibilità come dimostrato in [12].

In regime di non linearità geometrica e materiale è necessario un calcolo iterativo o incrementale. In questo caso, si riscontra dalla pratica numerica [13] come le strutture che lavorano in «hardening» richiedano uno sforzo computazionale minore impiegando il metodo delle forze mentre, se il legame carichi spostamenti è di tipo «softening», sia più opportuno adottare il metodo degli spostamenti.

La scelta del metodo di risoluzione è, perciò, determinante per l'esito del calcolo numerico. Tale scelta va condotta tenendo conto della stretta connessione esistente fra le caratteristiche fisico-meccaniche della struttura, sopra elencata, ed i problemi di generazione di errori in sede di soluzione numerica.

Per ottimizzare l'algoritmo risolutivo in ordine a minimizzare la generazione di errori numerici, il costo computazionale e la organizzazione e programmazione software, si propone la seguente schematizzazione strutturale.

3. Schematizzazione fisico-matematica della struttura

Si ipotizza il seguente modello fisico-matematico:

- 1 - Analisi mista mediante il metodo delle forze e degli spostamenti.
- 2 - Analisi mediante sottostrutturazione funzionale: le sottostrutture vengono definite secondo il funzionamento «hardening» o «softening» nell'ambito della struttura globale.
- 3 - Analisi delle strutture o sottostrutture in regime di grandi spostamenti e piccole deformazioni, ed in regime di «hardening» geometrico e materiale, mediante il metodo delle forze.
- 4 - Analisi delle strutture o sottostrutture in regime di piccoli spostamenti ed in regime di «softening» geometrico e materiale mediante il metodo dell'equilibrio.
- 5 - Sottostrutturazione fisica mediante la definizione di sottostruttura elementare fune la quale è formata da un insieme di elementi finiti lineari ad asta.

4. La struttura fune

4.1. Lo stato «0»

Nel caso di strutture spaziali complesse la ricerca dello stato «0» è essenziale. Numerosi lavori sono stati dedicati a questo problema [3-6]. Per quanto riguarda le funi singole, nella letteratura tecnica lo stato «0» è dato per definizione, quale dato noto per il problema della ricerca del susseguente stato di sollecitazione. In numerose applicazioni reali non è possibile definire uno stato «0» senza una precisa ricerca di una geometria iniziale equilibrata.

Dal punto di vista costruttivo p. es., normalmente viene richiesta che una fune, di una determinata lunghezza, venga marcata (con o senza uno stato di pretensione al banco), in corrispondenza dei luoghi dove saranno applicati i carichi; la lunghezza totale e parziale della fune inerte dovrà essere determinata in funzione di uno qualunque degli stati di caricamento che venga definito quale stato «0». Questo stato geometrico e di sollecitazione iniziale può essere ottenuto, nel modo più generale, in accordo con la pratica costruttiva moderna, mediante l'imposizione dell'equilibrio di un insieme strutturale formato da aste-nodi (fig. 1) con, eventualmente, condizioni o vincoli accessori di tipo geometrico o di tipo deformativo-tensionale [14-15].

L'energia potenziale totale delle aste in regime monoassiale, in presenza di uno stato iniziale di tensione (σ^0), si può esprimere come segue:

$$U^0 = \sum_{i=1}^{i=i+1} \frac{1}{2} \int_v \sigma^0 \epsilon dv + \{D_i\}^T \{P_i^0\} = \sum_{i=1}^{i=i+1} \frac{1}{2} S^0 (L - L^0) + \{D_i\}^T \{P_i^0\} \quad (4)$$

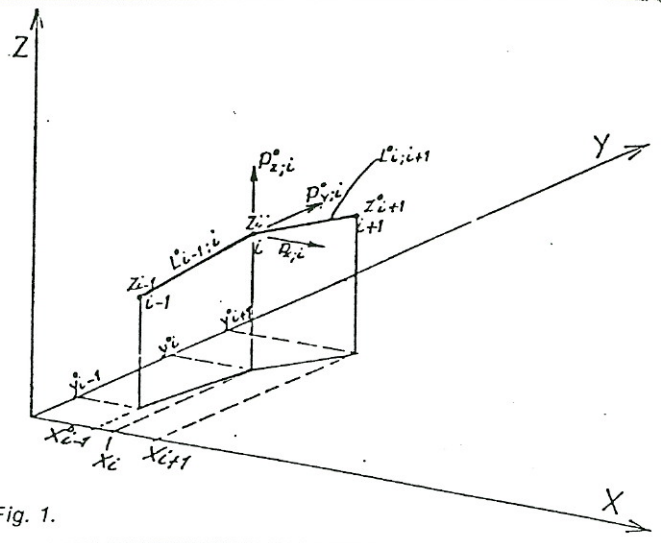


Fig. 1.

dove:

σ^0 = stato di tensione iniziale sull'asta generica

ϵ^0 = stato di deformazione iniziale sull'asta generica

$\{D_i\}$ = vettore di movimento geometrico

$\{P_i^0\}$ = carichi di stato «0» sul nodo generico «i».

Alle condizioni (4) sono associate, nei problemi pratici più correnti, le seguenti condizioni o vincoli accessori:

a) Condizione sulla geometria iniziale

$$\varphi(X, Y, Z) = X_i^0 - \bar{X}_i^0 = 0 \quad (5)$$

b) Condizione sulla costruzione delle lunghezze delle aste

$$\varphi(X, Y, Z) = L_{i,i+1}^0 - \bar{L}_{i,i+1}^0 = 0 \quad (6)$$

$\bar{L}_{i,i+1}^0$ = valore assegnato sul tratto $i; i+1$ $\begin{cases} i = 1 - RL \\ RL < M \end{cases}$

c) Condizione sugli sforzi nelle aste

$$\varphi(S) = S_{i,i+1}^0 - \bar{S}_{i,i+1}^0 \begin{cases} i = 1 - RS \\ RS < M \end{cases} \quad (7)$$

$\bar{S}_{i,i+1}^0$ = sforzo assegnato sul tratto $i; i+1$

d) Condizione sulla lunghezza indeformata delle aste

$$\varphi(X; Y; Z) = \frac{K_{i,i+1} \cdot L_{i,i+1}^0 - S_{i,i+1}^0}{K_{i,i+1}} - \bar{L}_{i,i+1}^0 = 0 \quad (8)$$

con

$K_{i,i+1}$ = rigidità estensionale dell'asta $i; i+1$

$\bar{L}_{i,i+1}^0$ = lunghezza inerte dell'asta $i; i+1$ quale lunghezza di prefabbricazione standard.

La soluzione delle (4) associate ai vincoli (5-8) può essere effettuata trovando il minimo della funzione reale $U^0(X; Y; Z)$ di n variabili soggette ai vincoli $m < n$

$$\begin{cases} \varphi_1(X; Y; Z; S) = 0 \\ \varphi_2(X; Y; Z; S) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(X; Y; Z; S) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

differenziabili nello spazio di n variabili.

Non essendo possibile, in ordine pratico, eliminare dalle (4) m variabili direttamente, è condizione necessaria per ottenere un massimo o minimo della $U^0(X; Y; Z; S)$ soggetta ai vincoli (9) nei quali:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0 \quad (10)$$

dove:

$$\Phi(X_1; \dots; X_n) = U^0(X; Y; Z; S) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(X; Y; Z; S) \quad (11)$$

λ = moltiplicatori di Lagrange.

È possibile ottenere la $n + m$ incognite,

$$\begin{cases} (X; Y; Z), & i = 1 - n \\ \lambda_j & j = 1 - m \end{cases}$$

delle $n + m$ equazioni (9) e (11).

4.1.1. La risoluzione numerica dello stato «0»

Dopo la differenziazione (7) si ha a disposizione il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0$$

$$\varphi_1(X; Y; Z; S) = 0 \quad (12)$$

⋮

$$\varphi_m(X; Y; Z; S) = 0$$

La prima parte a sinistra delle (12) rappresentano le condizioni di equilibrio espresse in forma di rigidità geometrica. Le incognite globali nel problema generale della ricerca di stato «0» sono le $3n$ coordinate nei nodi, più gli m sforzi sulle aste.

A disposizione abbiamo, in genere, $3n + R$ equazioni giacché le condizioni, o vincoli progettuali accessori, non sono necessariamente $R = m$.

Come già visto precedentemente [15] il problema generale dello stato «0» coinvolge simultaneamente tutte le incognite (geometria + stato di sollecitazione) il che equivale ad effettuare una fase tipica di progettazione strutturale.

Essendo le incognite globali del problema $3n + m$ si hanno le seguenti possibilità limite:

- Noto lo stato di sollecitazione, trovare la geometria del sistema strutturale che equivale a:
 - noti m valori di (S) sforzi nelle aste
 - trovare $3n$ coordinate dei nodi (k).

Problema possibile disponendo di $3n$ equazioni di equilibrio pari al numero di incognite.

- Nota la geometria del sistema, trovare lo stato di sollecitazione perciò:
 - noti $3n$ coordinate dei nodi (k)
 - trovare m valori di (S) nelle aste.

Il problema non è determinato giacché $m < 3n$, l'indeterminazione è pari a $3n - m$.

Per la soluzione di questi problemi, già affrontati, si veda [15].

4.2. L'elemento fune soggetto ad azione di carico generalizzato

Il problema statico più generale relativo all'elemento strutturale fune si presenta nei seguenti termini: nota la configurazione iniziale della fune soggetta ad un certo sistema di carichi e la legge costitutiva del materiale della fune, determinare la configurazione che la fune assume quando sia intervenuta una «variazione di stato» (sia cioè mutato il sistema di carico o introdotte deformazioni impresse, stati di sollecitazione e variazioni delle condizioni al contorno).

Soluzioni esatte del problema della statica delle funi sono conosciute solo per particolari stati di carico contenuti in un piano [16].

Diversi metodi numerici approssimati sono stati sviluppati e risolti nel campo della fune singola tanto per problemi bidimensionali [17] quanto nello spazio [18].

In alcuni recenti lavori [19, 20] esistono ancora alcune limitazioni importanti specialmente per poter usare l'elemento fune quale sottostruttura di un sistema di funi più complesso. Le limitazioni più significative sono:

- la mancanza di uno studio preciso delle condizioni geometriche e tensionali iniziali della fune;
- limitazioni nella possibilità di introdurre cedimenti dei vincoli giacché i metodi si basano sulla ricerca iterativa delle forze d'ancoraggio di uno degli estremi considerando fissa la distanza tra gli ancoraggi;
- difficoltà nella definizione di vincoli interni fra una fase

di carico ed una successiva; condizione necessaria per lo studio di alcuni problemi strutturali quali: problemi di contatto di pipe-lines sottomarine, trasporti mobili, Blondel, ecc. La definizione di vincoli provvisori interni, in fase iterativa di calcolo, è indispensabile per la sottostrutturazione in sistema misto di analisi.

Tutti i metodi proposti, ad iniziare dai classici lavori di J. Michalos e C. Birnsteil [17] e H.K. Bandel [18], agli altri, ed il metodo di seguito proposto, sono di tipo iterativo e vanno sotto il nome di metodo delle reazioni immaginarie.

Questo metodo propone la soluzione iterativa del problema dell'equilibrio dei sistemi articolati semplicemente connessi in regime unilaterale di sforzi ($S > 0$).

Nella figura 2, consideriamo un sistema costituito da n aste, con $n > 2$, tale che ad ogni nodo concorrono due sole aste. Siano $1, 2, \dots, i, \dots, n + 1$ i nodi ed $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_{n+1}$ le forze attive corrispondenti applicate.

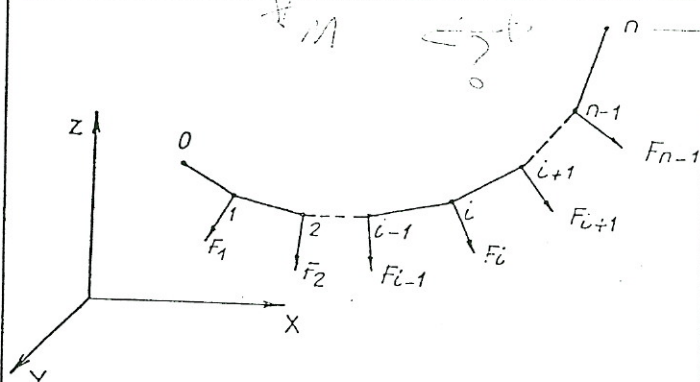


Fig. 2.

Per ogni nodo intermedio valgono le seguenti condizioni di equilibrio vettoriali:

$$\bar{F}_i + \bar{S}_{i-1} + \bar{S}_{i+1} = 0 \quad \text{per } i = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

dove S_{i+1} rappresenta lo sforzo che sul nodo i esercita l'asta $i+1$.

Per l'equilibrio dei punti estremi dovrà essere:

$$\bar{F}_1 + \bar{S}_{12} = 0, \quad \bar{F}_{n+1} + \bar{S}_{n+1,n} = 0 \quad (14)$$

Le (14) sono le equazioni ai limiti.

L'analisi dello stato di deformazione e sollecitazione viene svolta in due fasi:

- Fase anelastica:** in questa fase si ricerca la posizione di equilibrio della struttura fune considerando le aste inestensibili. Questa fase viene attivata in campo di grandi spostamenti di tipo geometrico (p. es. strutture pneumatiche - strutture internamente ipostatiche).
- Fase elastica:** terminata la fase anelastica o, considerato che la struttura è sufficientemente «rigida», si tiene in considerazione la componente elastica sullo stato di deformazione e di tensione.

Conosciuto lo stato «0» e perciò:

$$x_i; y_i; z_i; P_{xi}; P_{yi}; P_{zi} \quad \text{per ogni nodo } i$$

$$S_{i,i+1}; L_{i,i+1} \quad \text{per ogni asta,}$$

si consideri ora una variazione di stato. Le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} [S + \Delta S]_{i,i+1} \frac{[\Delta x + \Delta u]_{i,i+1}}{[L + \Delta L]_{i,i+1}} + \\ - [S + \Delta S]_{i-1,i} \frac{[\Delta x + \Delta u]_{i-1,i}}{[L + \Delta L]_{i-1,i}} = [P_x + \Delta P_x] \end{aligned} \quad (15)$$

idem per y
idem per z
per ogni nodo interno i .

Chiamando ora con

$$\frac{[S + \Delta S]_{i+1}}{[L + \Delta L]_{i+1}} = k_{i+1}; \quad \frac{[S + \Delta S]_{i-1}}{[L + \Delta L]_{i-1}} = k_{i-1} \quad (16)$$

e

$$q_{i-1} = -k_{i-1}; \quad q_{ii} = -[k_{i-1} + k_{i+1}]; \quad q_{i+1} = -k_{i+1} \quad (17)$$

si ha la nuova scrittura delle (15):

$$\begin{cases} q_{i-1} u_{i-1} + q_{ii} u_i + q_{i+1} u_{i+1} = \bar{P}_{x,i} \\ \text{idem per } y \\ \text{idem per } z \end{cases} \quad (18)$$

dove:

$$\bar{P}_{x,i} = [P + \Delta P]_{x,i} - k_{i-1} \Delta x_{i-1} + k_{i+1} \Delta x_{i+1} \quad (19)$$

In forma condensata possiamo scrivere:

$$[q] \cdot \{\delta\} = \{\bar{P}\} \quad (20)$$

dove $[q]$ può essere definita quale matrice delle forze. La matrice $[q]$ è tridiagonale.

Separatamente, le variazioni di lunghezza delle aste sono espresse dalla

$$\Delta L_{i,j} = \left[\frac{\Delta S_{i,j}}{E \cdot A} + \alpha \Delta T \right] \cdot L_{i,j} \quad (21)$$

In fase anelastica le (20) suggeriscono una risoluzione che corrisponde ad un caso particolare della metodologia di stato «0».

Considerando $\Delta L_{i,j} = 0$ il problema è quello di trovare gli spostamenti $(u, v, w)_i$ e lo stato di sollecitazione $S_{i,j}$ considerando costante la lunghezza delle aste (vedi punto 4.1).

Considerato che $r = m$ non deve essere associato nessun principio di minimo essendo unica la soluzione. In questo caso le (18) suggeriscono un processo iterativo basato principalmente sulla proprietà della matrice tridiagonale delle densità di sforzo.

La procedura risolutiva iterativa consiste nei seguenti passi:

- I) Si applicano i carichi ΔP .
- II) Si dà un valore di primo tentativo alle $q_{i,j}$ (è possibile partire anche dal valore $q_{i,j}$ di stato «0»).
- III) Si risolve la (18) tridiagonale.
- IV) Ottenuti gli spostamenti si controllano i valori di $L_{i,j}$; si modificano i valori di $q_{i,j}$ in modo da soddisfare le condizioni $L_{i,j} = \text{cost}$.
- V) Si ritorna alla fase IV finché, dopo il controllo di due valori consecutivi, non si sia raggiunta una precisione richiesta.

Raggiunta la convergenza sarebbe possibile variare la lunghezza delle aste con le (21), ed iniziare ancora il ciclo iterativo sopra proposto. In questo modo potrebbe essere calcolata anche la fase elastica.

Per ottenere una maggiore precisione di calcolo è preferibile ottenere una correzione iterativa operando sulla determinazione degli sforzi.

Considerando le condizioni di equilibrio globali in corrispondenza dei punti di ancoraggio si ha:

$$\begin{cases} R_{x,0} = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{i=n-1} \{ [P + \Delta P]_{x,i} [Z_n - (z+w)] + [P + \Delta P]_{x,i} (x+u)_i \} \\ R_{x,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} [P + \Delta P]_{x,i} - [R_{x,0}] \\ R_{y,0} = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{i=n-1} \{ [P + \Delta P]_{y,i} [Z_n - (z+w)] + [P + \Delta P]_{y,i} (y+r)_i \} \\ R_{y,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} [P + \Delta P]_{y,i} - [R_{y,0}] \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} R_{x,0} = [R_{x,0}] \frac{[z+w]}{[x+u]} \\ R_{x,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} [P + \Delta P]_{x,i} - [R_{x,0}] \end{cases} \quad (22)$$

Le corrispondenti di sforzo sono:

$$\begin{cases} [T + \Delta T]_{x,i,j} = [R_{x,0}] - \sum_{i=1}^i [P + \Delta P]_{x,i} \\ [T + \Delta T]_{y,i,j} = [R_{y,0}] - \sum_{i=1}^i [P + \Delta P]_{y,i} \\ [T + \Delta T]_{z,i,j} = [R_{z,0}] - \sum_{i=1}^i [P + \Delta P]_{z,i} \end{cases} \quad (23)$$

Lo sforzo nell'asta generica è così

$$[S + \Delta S]_{i,j} = \{ [T + \Delta T]_{x,i,j}^2 + [T + \Delta T]_{y,i,j}^2 + [T + \Delta T]_{z,i,j}^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

In fase elastica, considerando l'aggiornamento degli sforzi come perno iterativo si hanno le seguenti fasi di calcolo:

- I) elaborazione dei carichi ΔP_i ;
- II) calcolo degli $S_{i,j}$ con le (22), (23) e (24);
- III) calcolo degli spostamenti $(u; v; w)$, con le (18);
- IV) calcolo dei $\Delta L_{i,j}$ con le (21);
- V) iterazione anelastica con $[L + \Delta L]_{i,j} = \text{cost}$ fino a convergenza;
- VI) ritorno a II;
- VII) controllo convergenza sugli sforzi.

L'onere di calcolo e di occupazione di memoria è minimo, come si può osservare dalle varie fasi di calcolo sopra descritte. In particolare la fase II), che coinvolge la risoluzione di un sistema di 3 $(n-1)$ equazioni, trae vantaggio dalla struttura tridiagonale della matrice $[q]$.

La risoluzione di tale sistema equivale ad una semplice back-substitution.

Come si può osservare, la sottostruttura fune è stata risolta tenendo separate le condizioni di equilibrio da quelle di compatibilità.

5. Analisi di un sistema strutturale mediante il metodo di sottostrutturazione mista

In modo da illustrare il metodo, si prenda in considerazione una struttura reale (fig. 3) costituita da un sistema di funi interne ed una struttura esterna perimetrale d'ancoraggio.

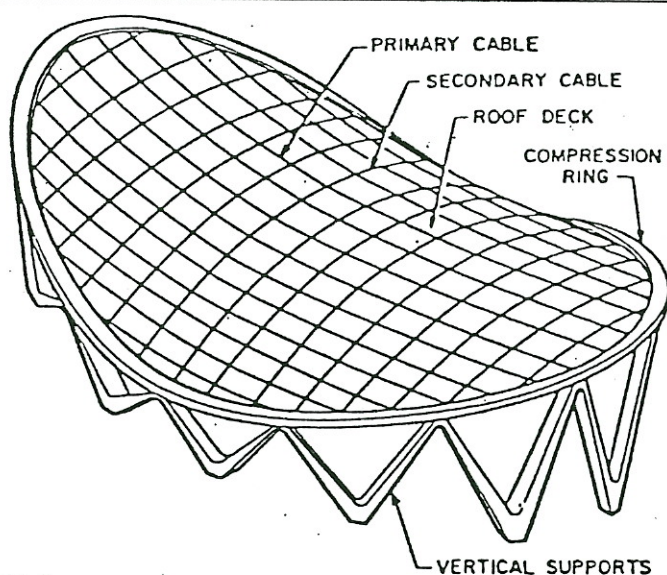


Fig. 3.

La notevole differenza di rigidità tra le due parti strutturali genera dei problemi numerici che possono essere risolti, in parte, con opportuni accorgimenti. Questi accorgimenti sono dipendenti dalla natura della struttura e perciò poco generali. In [24] sono illustrati alcuni suggerimenti di strategia numerica, fondati sull'esame della natura delle matrici di rigidità, e da considerazioni desunte da alcuni risultati numerici quali:

- necessità di individuare una soluzione approssimata quale configurazione d'inizio del calcolo mediante condensazione di gradi di libertà sulla rete di funi;
- alterazioni delle caratteristiche di rigidità degli elementi di rete a contatto con la struttura di bordo giacché gli elementi più corti di notevole rigidità nel piano tangente della struttura rendono altamente mal condizionata la zona della matrice di rigidità relativa all'interno dei nodi interessati;
- introduzione di una legge di distribuzione degli spostamenti, impressi dalla deformazione del bordo sulla rete di funi in modo da evitare divergenze di calcolo e, in caso di convergenza, diminuire i tempi di elaborazione;
- raffinamenti di calcolo fuori ciclo del bordo e della rete.

Onde evitare i sopra indicati problemi numerici prodotti, come abbiamo visto al punto 2, dalla disomogenea definizione del modello fisico-matematico della struttura, consideriamo di sezionare la struttura nelle seguenti parti (fig. 4):

$S_{i,i}$ = sottostrutture relativamente più rigide con funzionamento geometrico e materiale softening, da analizzare mediante il metodo degli spostamenti;

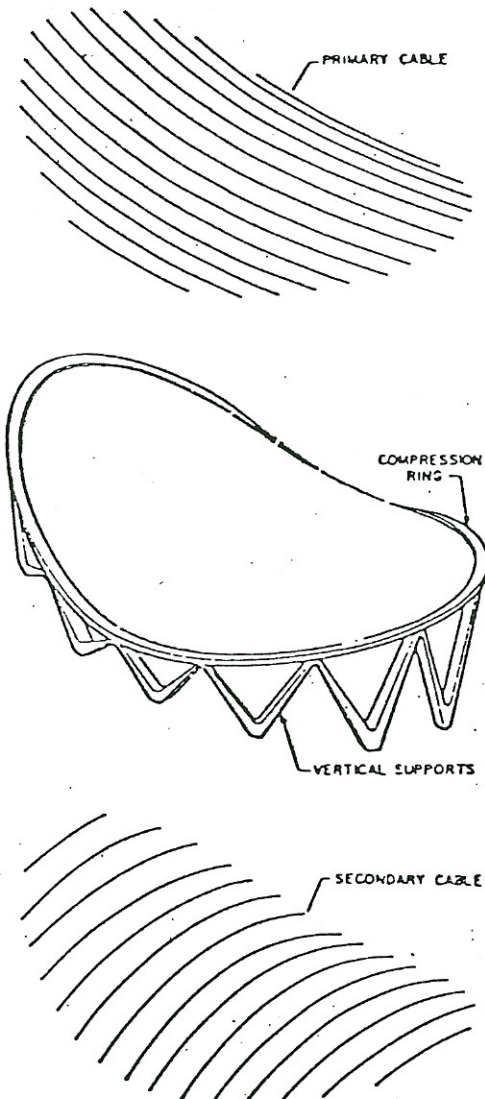


Fig. 4. Sottostruttura funzionale.

$S_{i,i}$ = sottostrutture di tipo fune posizionate su struttura a rete con dominante comportamento geometrico e hardening, da analizzare mediante il metodo delle forze

(in cui $i = 1-F$)

Consideriamo adesso le sottostrutture I e II collegate tra loro nell'insieme di punti B (vedi fig. 4). Separando gli spostamenti si ha:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB} & G_B \\ 0 & -G_B^T & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (25)$$

dove:

$[K]$ = matrici di rigidità della sottostruttura I relative ai nodi di tipo A (interni) e B (di bordo)

$[F]$ = matrice di flessibilità della sottostruttura II

$[G]$ = matrice di accoppiamento tra I e II

$\delta_A; \delta_B$ = vettori di spostamento in I

X = forze indeterminate o di bordo

$P_A; P_B$ = termini di carico in I

δ = termini di spostamento in II

La risoluzione delle (25) si può ottenere in termini di spostamenti considerando:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_A^* \end{Bmatrix} \quad (26)$$

con:

$$K_{BB}^* = K_{BB} + G_B F^{-1} G_B^T \quad (27)$$

e

$$P_B^* = P_B - G_B F^{-1} \delta \quad (28)$$

dove K_{BB}^* e P_B^* sono da interpretarsi rispettivamente quali matrici di rigidità e vettore dei carichi, trasformati dall'effetto degli spostamenti dei nodi comuni a I e II di tipo B, equivalente alla condensazione statica della sottostruttura II.

In campo non lineare, dove è necessario agire per via iterativa e/o incrementale le (26) (27) e (28) suggeriscono di adottare un procedimento iterativo di rilassamento sequenziale che comprende le seguenti fasi:

- a) Determinazione delle forze di bordo in II
- b) Valutazione di $P_B^{* (1)}$ di primo tentativo (28)
- c) Valutazione di $K_{BB}^{* (1)}$ di primo tentativo (27)
- d) Risoluzione delle (26)
- e) Ritorno ad a)
- f) Controllo di convergenza.

La non linearità geometrica e materiale è introdotta per via incrementale.

Nel caso di un impiego del metodo delle forze per le strutture di fune, l'aggiornamento si ottiene ciclicamente aggiornando le deformazioni con le (21) nel seguente modo

$$L_{ij}^{r+1} = L_{ij}^r + \Delta L_{ij}^{r+1} \quad (29)$$

L'aggiornamento della geometria si ottiene con le (15) sostituendo ciclicamente:

$$\begin{cases} X_i^{r+1} = X_i^r + u_i^{r+1} \\ Y_i^{r+1} = Y_i^r + v_i^{r+1} \\ Z_i^{r+1} = Z_i^r + w_i^{r+1} \end{cases} \quad (30)$$

Nel caso di impiego del metodo delle forze per le strutture incrementale avviene direttamente sulla matrice di rigidità secondo l'espressione

$$[K]^{r+1} = [K_e + K_g] \{\delta\}^{r+1} = \{P\}^{r+1} - [K_{NL}] \{\delta\}^r = \{P\}^{r+1}$$

dove:

K_e = matrice elastica

K_g = matrice geometrica

P = vettore di carichi generalizzato
 K_{NL} = matrice dei coefficienti non lineari
 r = indice dell'incremento.

All'interno dell'incremento vengono iterativamente aggiornati i termini di carico fittizio P fino a convergenza raggiunta.

6. Alcuni esempi numerici

6.1. Struttura a rete

In figura 5 è illustrata una sequenza interattiva di progettazione. In figura 6 il diagramma carichi-spostamenti ci mostra il chiaro funzionamento in hardening della struttura.

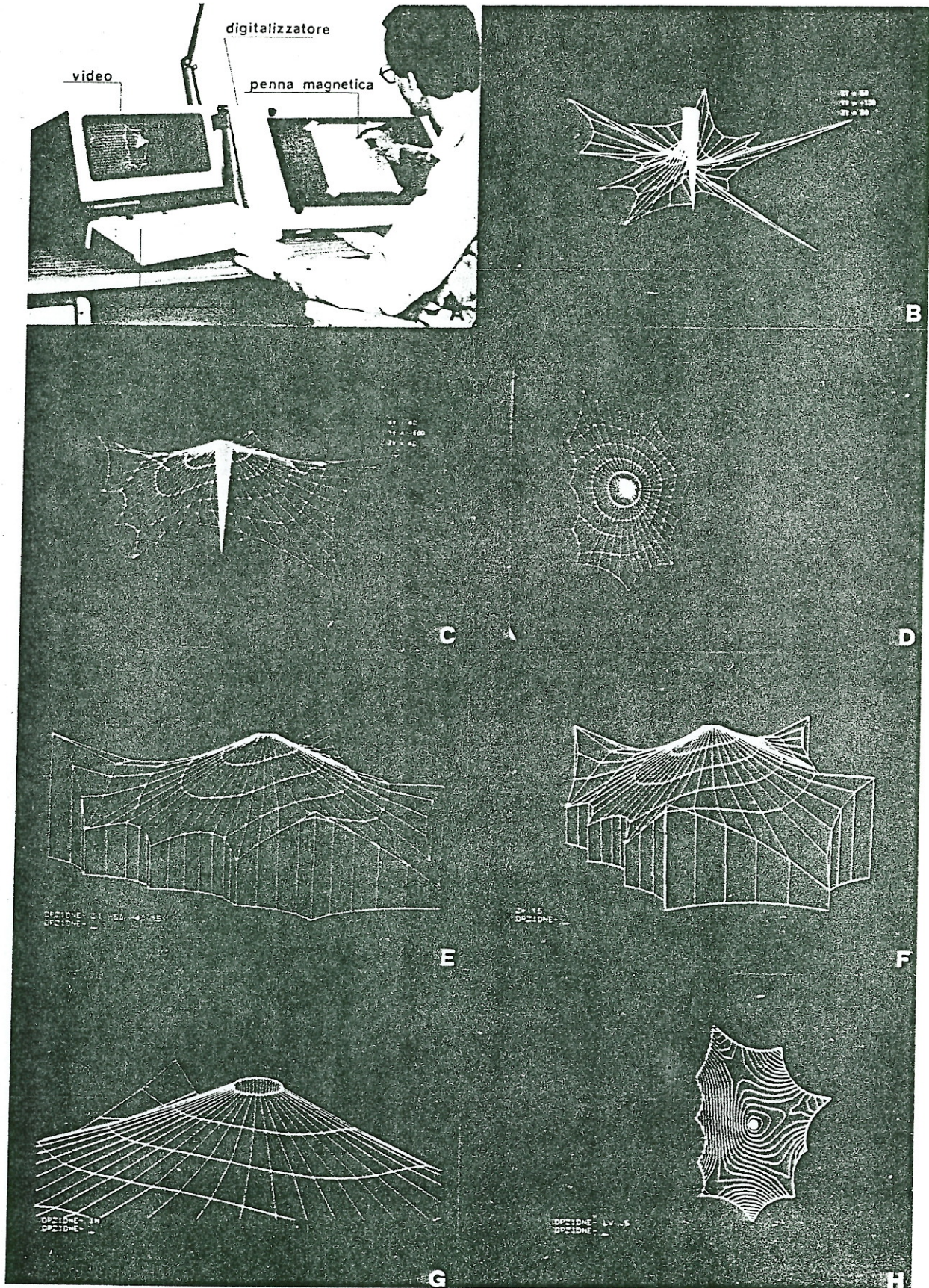


Fig. 5. Procedimento di progettazione interattiva. A. Dati di input grafico. B. Calcolo iterativo. C. Stato «0». D. Vista in pianta. E. Vista prospettica. F. Rotazione. G. Zoom. H. Curve di livello.

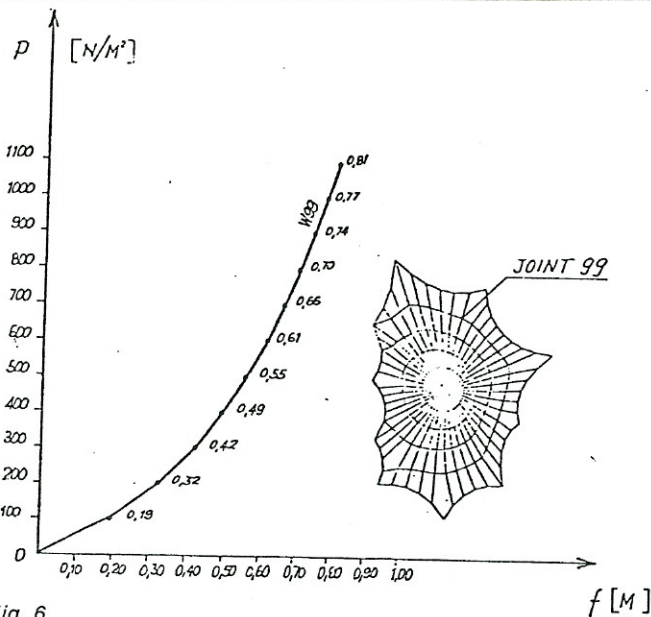


Fig. 6.

6.2. Struttura pneumatica

La struttura pneumatica di figura 7 di 36×36 m di luce, è sottoposta al carico di vento concentrato su zona centrale. In questa zona il fenomeno di snapping è stato seguito facilmente con la tecnica illustrata nel presente lavoro.

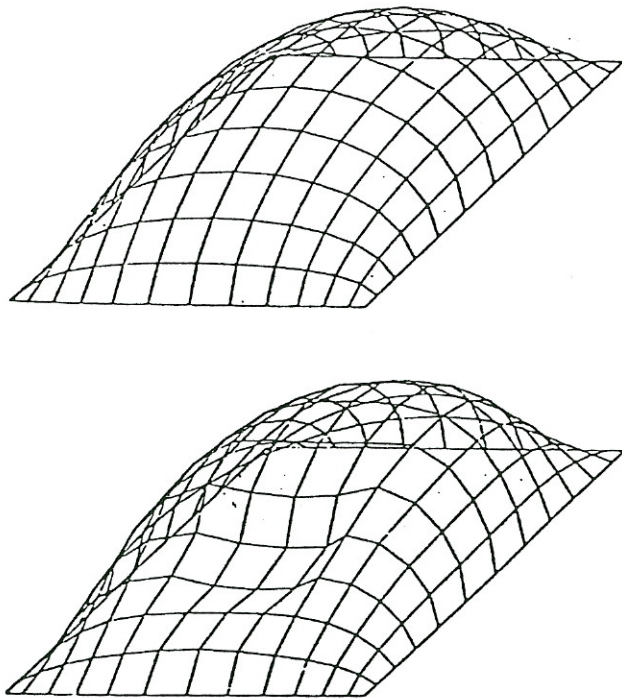


Fig. 7.

BIBLIOGRAFIA

- [1] «Colloquium on hanging roofs», I.A.S.S., Paris, 1962.
- [2] «Space structures», Int. Conf., Surrey, 1967.
- [3] «I.A.S.S. Pacific Symposium part II on tension structures and space frames», Tokyo, 1972.
- [4] «International conference on tension roof structures», London, 1974.
- [5] «Wide span surface structures», University of Stuttgart, 1976.
- [6] «I.A.S.S. World congress on space enclosures», Montreal, 1976.
- [7] «I.A.S.S. World congress on shell and spatial structures», Madrid, 1979.
- [8] Asplund S.O.: «Force-method analysis of orthogonal cable nets», in ref. 5.
- [9] Papadrakakis M.: «A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters», computer methods in applied mechanics and engineering, 1981 (25).
- [10] Roy John R.: «Numerical error in structural solutions», A.S.C.E., ST4, 1971.
- [11] Meyer Christian: «Special problems related to linear equation solvers», A.S.C.E., ST4, 1975.
- [12] Pozzati Piero: «Annotazioni sul calcolo dei modi naturali di vibrare delle strutture elastiche», Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie XIII, Tomo VII.
- [13] Ceccoli Claudio: «Osservazioni in merito ai comportamenti non lineari delle strutture strallate», Atti dell'Istituto di Tecnica delle costruzioni, n. 2/1979.
- [14] Kazuo Ishii: «Analytical shape determination for membrane structures», in ref. 6.
- [15] Majowiecki M. e Tironi G.: «Geometrical configuration of pneumatic and tent structures obtained with interactive computer aided design», in ref. 6.
- [16] Odenhausen H.: «Basi teoriche per l'impiego dei cavi di acciaio nelle costruzioni», Acciaio, n. 2/1965.
- [17] Michalos J. e Birnsteil C.: «Movements of a cable due to changes in loading», A.S.C.E., ST12, 1960.
- [18] Bandel H.K.: «Das hangende steil unter raumlicher Belastung und Temperaturänderung», Der Bauingenieur, 1962, Heft 4.
- [19] Peyrot A. e Goulois A.: «Analysis of flexible transmission lines», A.S.C.E., ST5, 1978.
- [20] Peyrot A.: «Marine cable structures», A.S.C.E., ST12, 1980.
- [21] Parbery R.D.: «A continuous method of analysis for the inflatable dam», A.S.C.E., 1976.
- [22] Yermolov U.V.: «On methods of determining a cylindrical shell's profile deformed by wind action», CIB-I.A.S.S. Symposium on air supported structures, Venezia, 1977.
- [23] Majowiecki M. e Tironi G.: «Interactive computer aided design in the field of pneumatic structures», CIB-I.A.S.S., Venezia, 1977.
- [24] Odorizzi S. e Schrefler B.: «Contributo allo studio di reti di funi pretese entro strutture elasticamente deformabili», Costruzioni Metalliche, n. 3/1974.
- [25] Chiarugi A., Majowiecki M. e Tironi G.: «On the deformative state of pneumatic structures», ref. 7.
- [26] Alessi R., Bairaktaris D., Caridakis F., Majowiecki M. e Zoulas F.: «The roof structures of the new sport arena in Athens», ref. 7.