

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA INTERAZIONE ELASTICA FRA RETI DI FUNI E STRUTTURE D'ANCORAGGIO

M. Majowiecki*, F. Zoulas**

Sommario

Le tensostrutture a rete di funi presollecitate, ancorate a strutture di bordo elasticamente cedevoli, sono largamente impiegate per coperture di grande luce libera.

La cedevolezza delle strutture d'ancoraggio può alterare profondamente lo stato di deformazione e sollecitazione «naturale» (a vincoli rigidi) della rete di funi.

Nella presente nota viene illustrata, mediante un metodo misto di analisi, l'influenza di alcuni parametri strutturali sui criteri di progettazione e verifica tendenti a raggiungere una soluzione ottimizzata dal punto di vista tecnico-economico.

1. Introduzione

Nell'ambito della progettazione strutturale di coperture realizzate da una rete di funi presollecitata ancorata a strutture di bordo deformabili (fig. 1), si rilevano dominanti due problemi:

- scelta del metodo d'analisi numerica mediante elaboratore elettronico;
- individuazione ottimale di alcuni parametri meccanici in ordine a minimizzare i costi complessivi delle strutture.

Per quanto riguarda il primo problema, l'analisi strutturale della rete di funi collaboranti elasticamente con le strutture d'ancoraggio, è stata affrontata secondo i seguenti schemi:

- a) analisi della rete al continuo quale membrana anticlastica presollecitata; il bordo viene considerato rigido e dimensionato con le forze trasmesse dalla membrana calcolata a vincoli rigidi;

- b) analisi della rete di funi con spostamenti permessi solo in direzione verticale (un grado di libertà per nodo). La rete di funi reale viene ridotta in funi equivalenti di minor numero in modo da diminuire il numero delle incognite. Il bordo collaborante viene analizzato simultaneamente alla rete o mediante sottostrutturazione.

Nell'ambito di una sottostrutturazione il metodo di calcolo (metodo dell'equilibrio o della congruenza) adottato è il medesimo;

- c) analisi della rete di funi con tre gradi di libertà per nodo. Il bordo e la rete vengono analizzati globalmente o mediante sottostrutturazione nell'ambito del medesimo metodo d'analisi.

In accordo con quanto sopra, sono stati redatti i lavori [1], [2], [3] e [4].

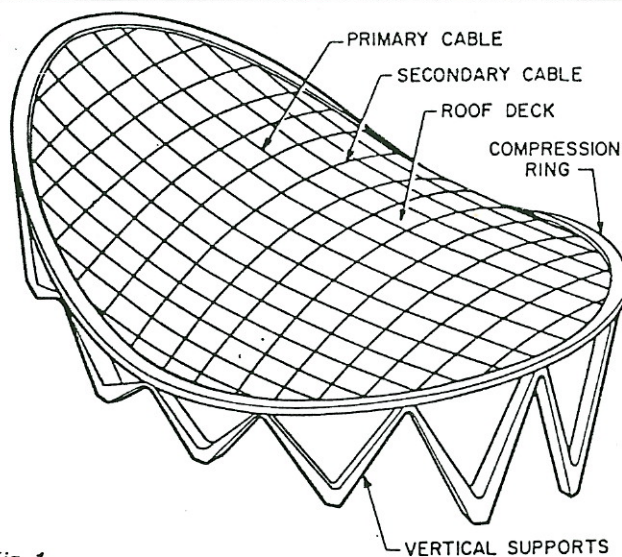


Fig. 1.

* Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna.

** Assistente al Laboratorio di Progettazione computerizzata, Bologna.

Le impostazioni a) e b) introducono delle approssimazioni che limitano notevolmente il campo d'indagine strutturale; la limitazione di vincoli rigidi obbliga ad una soluzione antieconomica, l'analisi nel continuo a membrana è possibile solo per alcune superfici esprimibili analiticamente e solo per alcune condizioni di carico. La considerazione di rete di funi contenuta in piani paralleli è limitativa, non permettendo di considerare né forme più complesse né carichi diversi da quelli verticali, limitando l'analisi solo alle superfici sufficientemente «piatte».

Le impostazioni di analisi strutturale secondo c) approdano sovente a problemi di calcolo numerico che si manifestano principalmente nei seguenti modi:

- alto numero di condizionamento $C(K) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ della matrice dei coefficienti generata mediante il metodo dell'equilibrio. La rete di funi è dominata dai modi «lenti» di vibrare e perciò la matrice di rigidezza, generata col metodo dell'equilibrio ed espressa in parole di calcolatore di lunghezza costante, decurta l'informazione associata ai modi più lenti di vibrare; come si può osservare esprimendo la matrice di rigidezza in funzione degli autovettori ed autovalori [6],

$$[K] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{V_i\} \{V_i\}^T \quad (1)$$

$\lambda_i = i'$ esimo autovalore

$V_i =$ il corrispondente modo di vibrare.

Per evitare gli errori di troncamento, specialmente utilizzando calcolatori che lavorano con pochi bits è opportuno impiegare, nell'analisi della rete di funi, il metodo delle forze. In questo caso abbiamo

$$[K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \{V_i\} \{V_i\}^T \quad (2)$$

e perciò il troncamento numerico avviene sui modi più rigidi di vibrare;

- scarso condizionamento della matrice dei coefficienti, tanto per il metodo dell'equilibrio quanto per il metodo delle forze, per la presenza in caso di risoluzione globale, di parti di strutture notevolmente più rigide di altre. La rigidezza dell'anello, nei casi pratici incontrati, specialmente con anelli in c.a., è notevolmente maggiore della rigidezza della rete di funi, specialmente in direzione della normale alla superficie della struttura. Gli elementi finiti tipo asta con sei gradi di libertà per nodo adottati per la struttura di bordo e quelli ad asta, in regime monoassiale, con tre gradi di libertà per nodo, generano, per ogni grado di libertà, righe della matrice dei coefficienti numericamente molto differenti.

Nel decadimento della diagonale principale durante il procedimento di risoluzione di Gauss, si incontrano sovente numeri prossimi allo zero di macchina. Ci si trova in situazioni simili a:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_A & -K_A \\ -K_A & K_A + K_B \end{bmatrix} \quad (3)$$

con $K_A \gg K_B$.

$[K]$ è rappresentata accuratamente solo se K_B non viene perduta per troncamento rispetto a K_A ;

- risoluzione con il metodo dell'equilibrio di strutture con diverso funzionamento in campo di non linearità geometrica e materiale.

La rete di funi ha un tipico comportamento «hardening» geometrico, mentre il bordo ha un comportamento «softening» geometrico e materiale.

Lo sforzo numerico viene minimizzato adottando il metodo dell'equilibrio per le strutture con comportamento «softening», mentre il metodo delle forze è più indicato nella risoluzione incrementale della non linearità di tipo «hardening».

Relativamente all'individuazione dei parametri meccanici e strutturali più idonei ad essere considerati in fase progettuale, nella presente nota si intende valutare l'influenza delle seguenti variabili:

- deformabilità della struttura d'ancoraggio
- dimensioni della maglia della rete di funi.

Per quanto riguarda l'interazione elastica tra rete e bordo durante la fase di pretensione e di stato «0» non risulta, nella letteratura tecnica, alcun accenno. Alcune considerazioni su questo problema vengono fatte in concomitanza dell'illustrazione degli esempi numerici.

2. Cenni sul metodo di analisi mediante sottostrutturazione funzionale

Il metodo adottato per l'analisi strutturale è già stato illustrato in maniera generale in [6].

Per quanto riguarda il caso specifico, oggetto di questa nota, si adottano le seguenti ipotesi:

- analisi mista per sottostrutturazione funzionale;
- analisi della struttura di bordo in «softening» materiale, piccoli spostamenti e deformazioni, mediante il metodo dell'equilibrio;
- analisi della rete di funi in «hardening» geometrico, grandi spostamenti e piccole deformazioni, mediante il metodo delle forze;
- analisi iterativa mediante sottostrutturazione fisica elementare di ogni fune nell'ambito della rete.

La figura 2 illustra la sottostrutturazione effettuata dove:

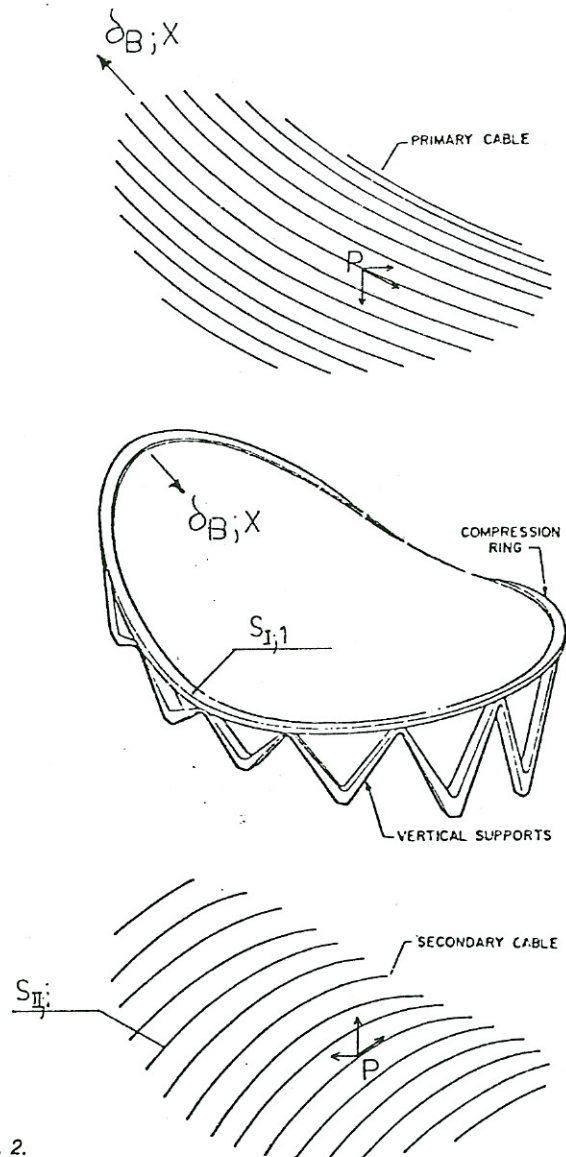


Fig. 2.

$S_{I;1}$ = sottostruttura di bordo
 $S_{II;i}$ = sottostruttura rete formata da F sottostrutture
 $i = 1 - F$ funi elementari.

Pensiamo ora di avere ottenuto con uno dei metodi indicati in [5], [6] la soluzione di stato «0» e perciò di avere noto:

$(X^0; Y^0; Z^0)_j$; $j = 1 - n$ = coordinate di stato «0» dei nodi
 L_{kj}^0 ; $\bar{k}j = 1 - m$ = lunghezza di stato «0» delle aste
 S_{kj}^0 ; $\bar{k}j = 1 - m$ = sforzo di stato «0» nelle aste
 P_j^0 ; $j = 1 - n$ = carico di stato «0» nelle aste

Consideriamo adesso le sottostrutture I e II collegate tra loro nell'insieme di punti B (vedi fig. 2). Separando gli spostamenti si ha:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & 0 \\ K_{AB}^T & K_{BB} & G_B \\ 0 & -G_B^T & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

dove:

K = matrice di rigidezza della sottostruttura I relativa ai nodi di tipo A (interni) e B di frontiera.

F = matrice di flessibilità della sottostruttura

G = matrice di accoppiamento tra I e II

δ_A ; δ_B = vettori di spostamento in I

X = forze indeterminate e di frontiera

P_A ; P_B = termine di carico in I

δ = termine di spostamento in II .

La soluzione delle (4) si può ottenere in termini di spostamenti considerando:

$$\begin{Bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B^* \end{Bmatrix} \quad (5)$$

con:

$$K_{BB}^* = K_{BB} + G_B F^{-1} G_B^T \quad (6)$$

e

$$P_B^* = P_B - G_B F^{-1} \delta \quad (7)$$

dove K_{BB}^* e P_B^* sono da interpretarsi rispettivamente quali matrice di rigidezza e vettore dei carichi, trasformati dall'effetto degli spostamenti dei nodi comuni, a I e II di tipo B , equivalente alla condensazione statica della sottostruttura II .

In campo non lineare, dove è necessario agire per via iterativa ed/o incrementale le (5) (6) e (7) suggeriscono di adottare un procedimento iterativo di rilassamento sequenziale che comprende le seguenti fasi:

- determinazione delle forze di frontiera in II
- valutazione di $P_B^{*(1)}$ di primo tentativo (7)
- valutazione di $K_{BB}^{*(1)}$ di primo tentativo (6)
- risoluzione delle (5)
- ritorna ad a)
- controllo di convergenza.

Per quanto riguarda la fase a) la risoluzione della rete e perciò la preparazione sistematica delle $[F]$ e $[G_B]$, avviene seguendo il metodo indicato al punto 4.2 di [6].

Senza nulla togliere alle generalità del metodo, un primo valore delle forze nella rete può essere ottenuto sfruttando la

caratteristica di ipostaticità fisica della rete. Considerando la rete formata da m aste ed n nodi in generale si ha:

$$3n > m \quad (8)$$

La condizione di equilibrio

$$[A]\{S + \Delta S\} = \{P + \Delta P\} \quad (9)$$

dove:

$[A]$ = matrice dei coseni direttori per geometria indeformata

$\{S + \Delta S\}$ = vettore delle forze sulle aste dopo variazione di carico

$\{P + \Delta P\}$ = vettore dei carichi

presentano una matrice $[A]$ rettangolare con $3n$ righe ed m colonne.

Un valore di primo tentativo molto utile per diminuire i cicli iterativi si può ottenere mediante il metodo dei minimi quadrati minimizzando il residuo dei carichi non equilibrati:

$$\begin{aligned} [A]\{S^0 + \Delta S\} - \{P^0 + \Delta P\} &= \{R\} \\ \{R\}^T \{R\} &= \min \end{aligned} \quad (10)$$

Il diagramma di flusso, in accordo con quanto sopra esposto, è sintetizzato in fig. 3.

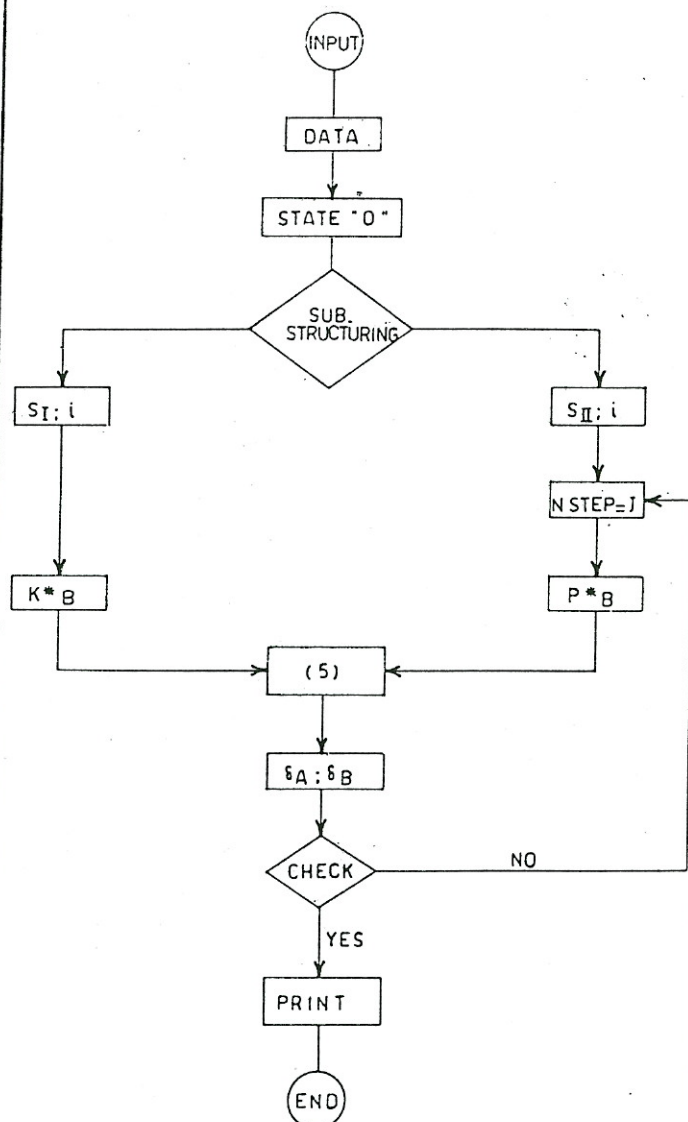


Fig. 3.

3. Esempi numerici

Conformemente al metodo di analisi illustrato nel paragrafo 2, ci proponiamo di sottoporre a un esame una struttura a rete di funi ancorata a una struttura spaziale elastica caricata di un peso verticale uniforme di 800 N/m².

La rete di funi adottata è realizzata con maglie variabili e la trave di bordo della struttura è un anello spaziale la cui geometria è definita come l'intersezione di un paraboloide iperbolico con un cilindro circolare di 60 m di diametro, analiticamente descritto da:

$$\begin{cases} \frac{X^2}{40,909} - \frac{Y^2}{64,286} = Z \\ X^2 + Y^2 = 900 \end{cases} \quad (11)$$

La variazione della dimensione delle maglie della rete è illustrata nella fig. 4.

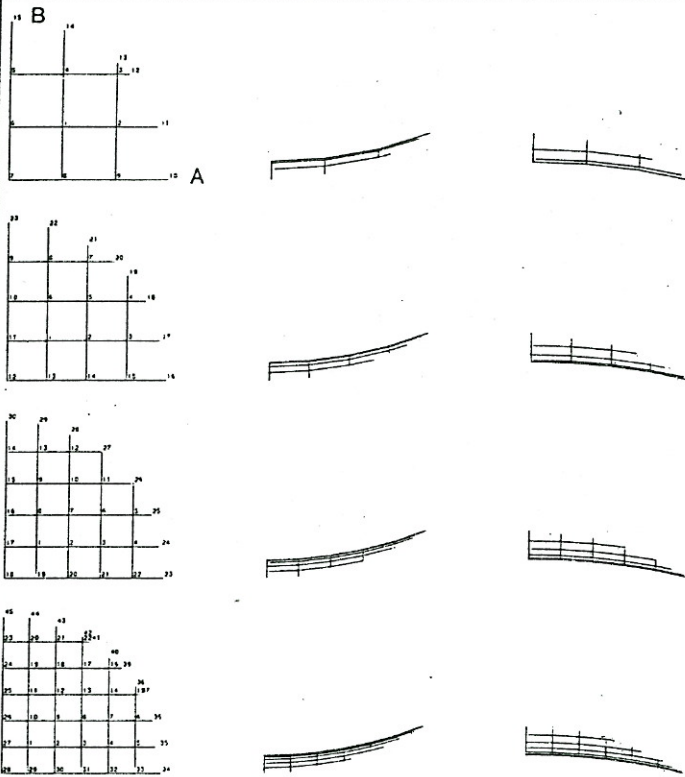


Fig. 4.

Lo stato di tensione iniziale (stato «0») nella rete di funi è definito, in funzione della dimensione (*i*) della rete o maglia come:

$$H_p = 4000 \cdot i$$

$$H_s = 6286 \cdot i$$

dove:

H_p = componente orizzontale delle forze della fune portante

H_s = componente orizzontale delle forze della fune stabilizzante.

TABELLA 1

J_y	J_z	A
∞	∞	∞
0.34	1.8	0.9
0.17	0.9	0.5
0.102	0.54	0.2
0.079	0.42	0.16
0.056	0.295	0.11
0.032	0.17	0.06
0.017	0.09	0.03

La struttura di ancoraggio è rappresentata da una struttura spaziale supportata solo verticalmente in un numero discreto di giunti.

I dati statici della sezione trasversale della struttura sono indicati nella Tabella 1.

Con i dati strutturali sopradetti intendiamo analizzare l'influenza della collaborazione elastica tra rete di funi-struttura d'ancoraggio e la dimensione della rete a maglia per valutare le variazioni nello stato di tensione e le deformazioni della struttura globale.

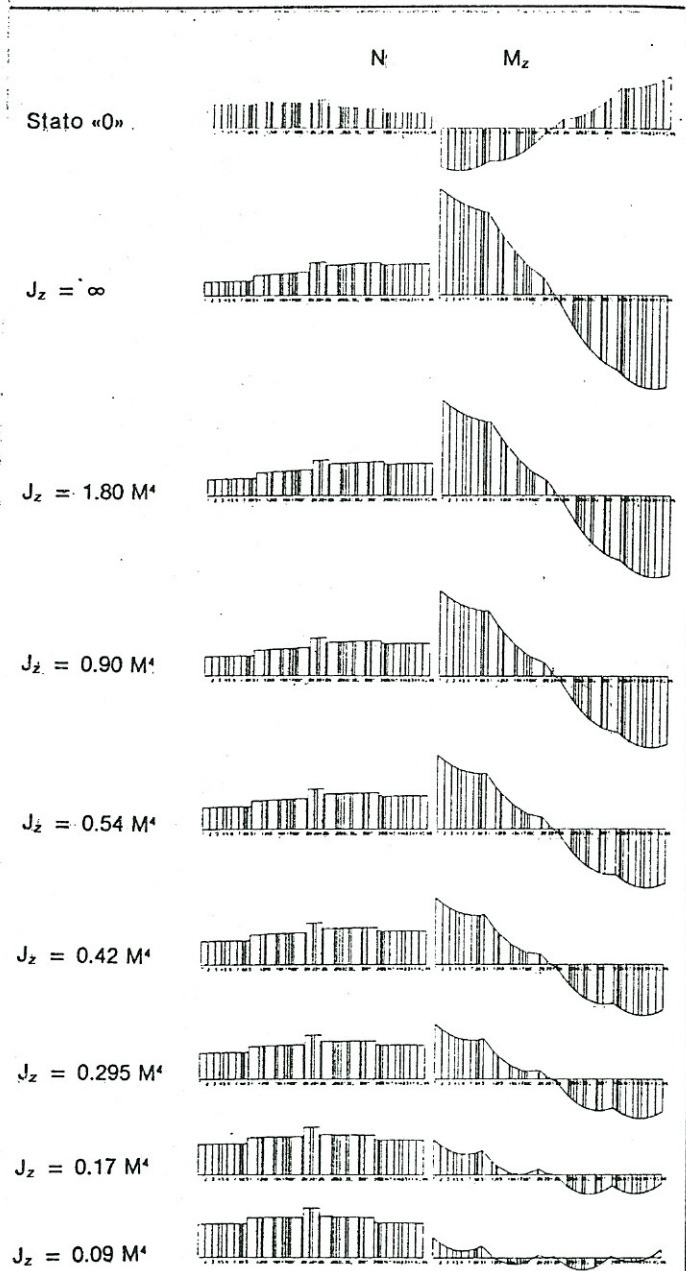


Fig. 5. Distribuzione lungo un quarto dell'anello (AB) di N e M_z in funzione della variazione di J_z per una maglia di rete di 10×10 m.

Nella figura 6 è illustrata la variazione dello spostamento verticale nel centro della rete di funi in funzione del parametro di inerzia J_z della sezione della trave di bordo. Nella figura 6 viene anche fornito il valore limite dello spostamento per $J_z = \infty$.

Nella figura 7 sono disegnate le variazioni nello spostamento orizzontale delle sezioni A e B della struttura ad anello. La figura 8 illustra la variazione dei principali momenti flettenti (M_z) nella sezione A della struttura ad anello in funzione di J_z per tutte le dimensioni qui considerate della rete. La figura 9 illustra la medesima cosa per la forza assiale nella sezione A.

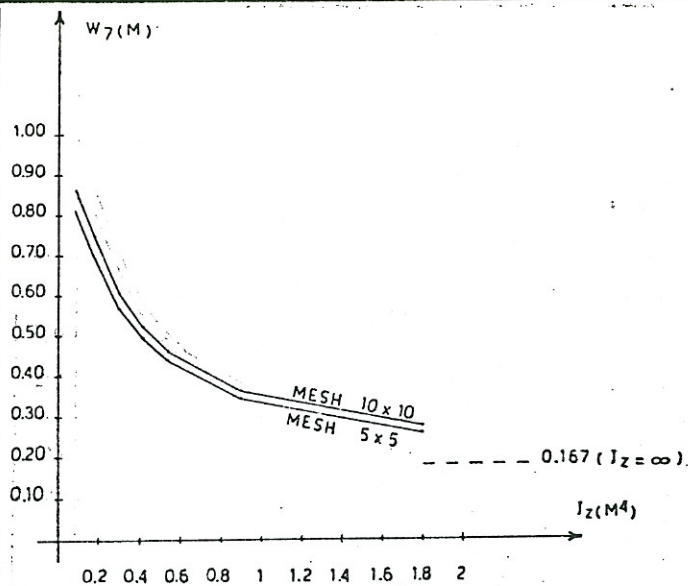


Fig. 6. Spostamento verticale del nodo centrale della maglia di funi.

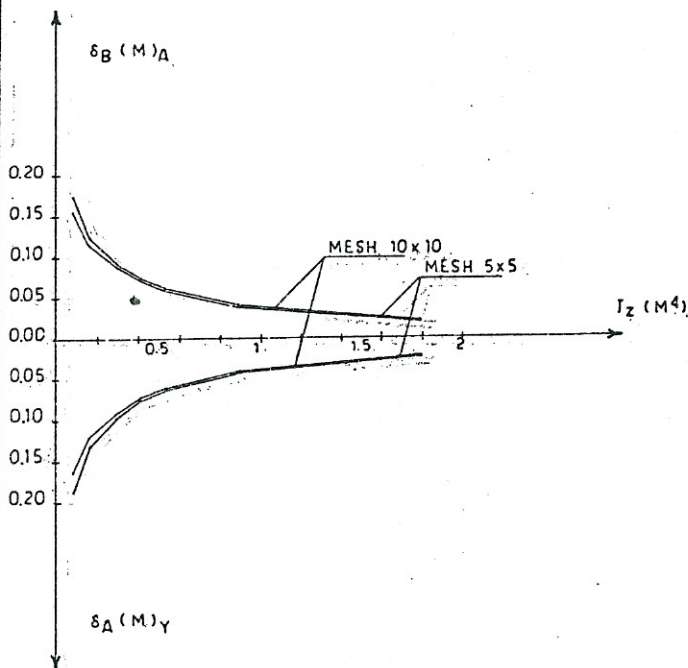


Fig. 7. Spostamento orizzontale dell'anello di bordo.

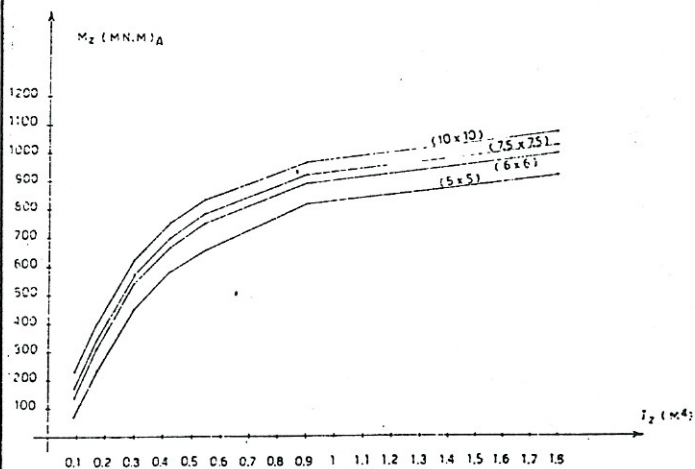


Fig. 8. Momenti flettenti dell'anello nella sezione A.

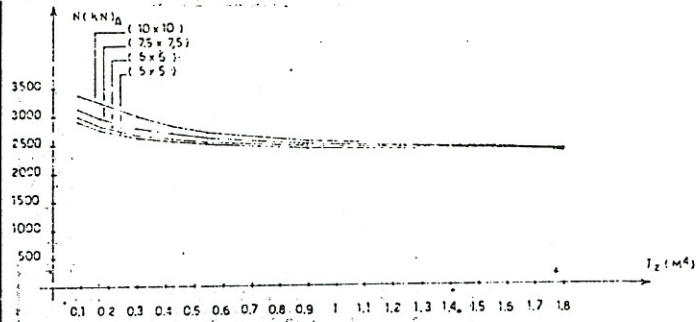


Fig. 9. Forze assiali dell'anello nella sezione A.

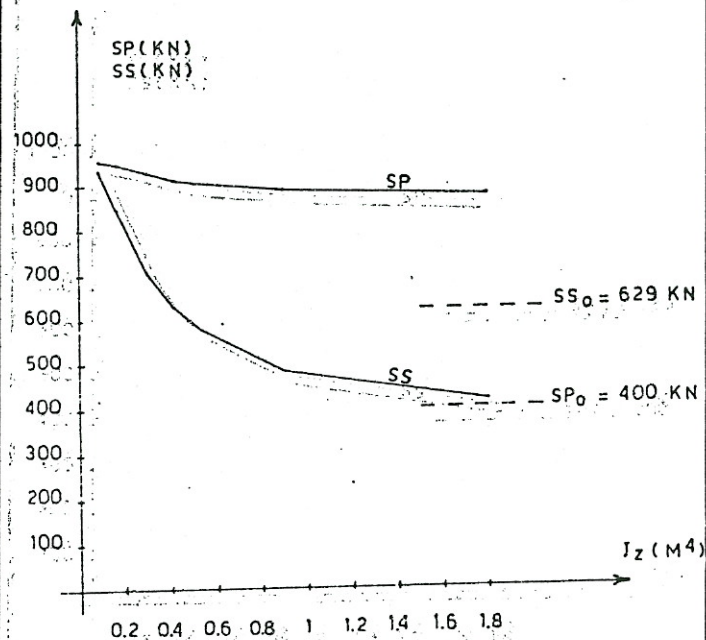


Fig. 10. Forze di cavi nella sezione A e B.

La figura 10 mostra la variazione tipica delle forze della fune per la maglia di 10x10 m, inoltre indica i valori dello stato «0» iniziale.

Le figure 11 e 12 mostrano chiaramente la variazione del momento in funzione della rete.

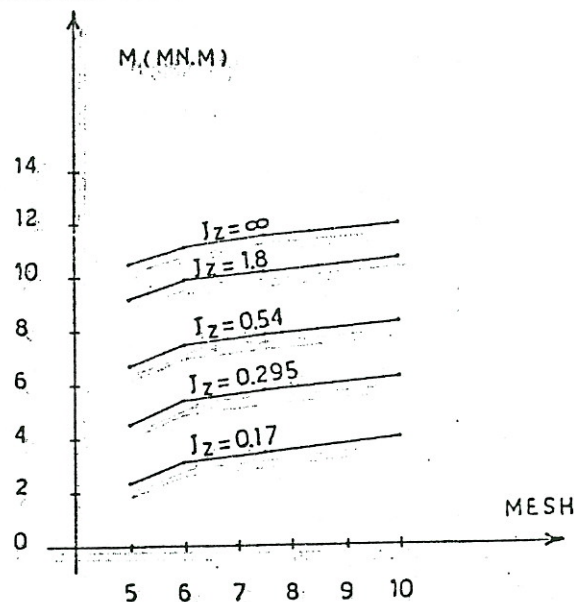


Fig. 11. Variazione del momento nella sezione A dell'anello in funzione della maglia.

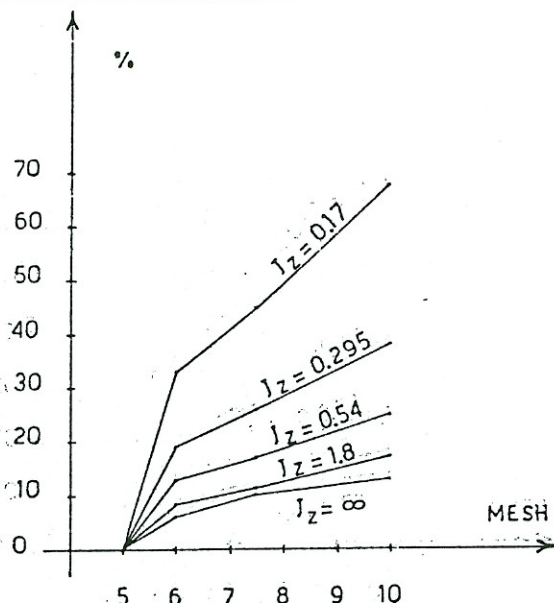


Fig. 12. Variazione percentuale del momento in funzione di maglia della rete.

La figura 13 riporta la variazione degli spostamenti nelle sezioni A e B della struttura ad anello considerando l'interazione elastica fra l'anello e la fune durante la ricerca dello stato «0».

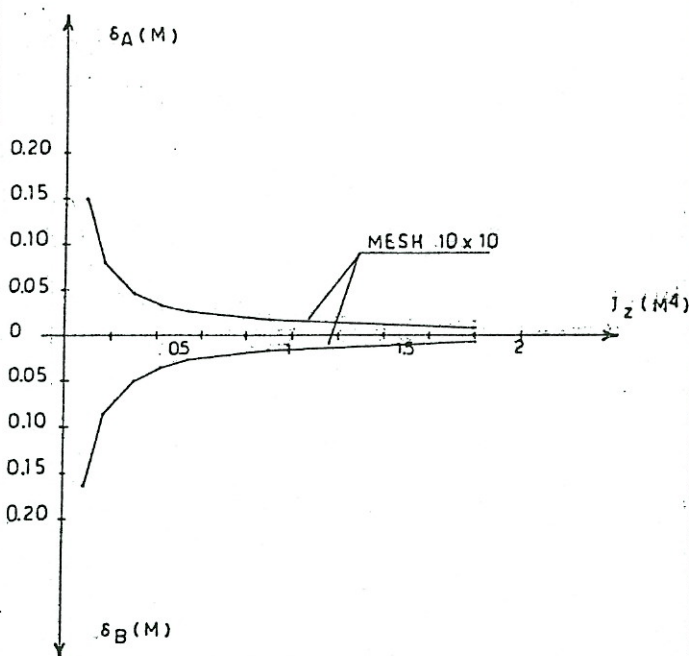


Fig. 13. Spostamenti dell'anello in condizione di pretesione nelle sezioni A e B.

4. Conclusioni

Dall'esame dei risultati tracciati nelle figure 6 ÷ 13 è possibile ricavare che:

- le ipotesi ($J_z = \infty$) non danno alcuna utile informazione progettuale per le strutture attuali, neppure per la fase preliminare del progetto;
- durante l'interazione elastica, gli sforzi nella struttura di ancoraggio decrescono drasticamente specialmente per valori bassi di J_z (vedi figg. 5 e 8). Per trovare un minimo per il costo strutturale è molto importante esaminare la

variazione di momenti flettenti in funzione della riga relativa di entrambe le strutture, rete di funi-struttura di ancoraggio. Per la struttura analizzata in questo scritto la variazione auspicabile di inerzia è trovata tra $0.2 \div 0.5$, dove il decremento di M_z è più che proporzionale.

Si impongono limiti più bassi di J_z , a seguito delle limitazioni deformanti nella rete di funi o per spostamenti massimi nella struttura di ancoraggio (figg. 6 e 7).

- lo spostamento della struttura di ancoraggio trasmette alla struttura globale delle proprietà di auto-aggiustamento poiché per un certo valore di inerzia (nel nostro caso 0.4; fig. 10) le forze «naturali» decrescenti nelle funi stabilizzanti tornano ad aumentare per quanto riguarda il valore dello stato «0» (SS.); questi spostamenti sono indotti dall'interazione elastica tra la rete di funi e la struttura di ancoraggio;
- la distribuzione del momento nella struttura di ancoraggio cambia evidentemente per la variazione della dimensione della rete a maglia (vedi figg. 11 e 12). La scelta della rete a maglia è molto importante per minimizzare il costo globale della struttura. Questo costo è evidentemente correlato al costo del sistema di copertura della volta. Dalla fig. 12 è possibile osservare che da una maglia di 5×5 m e una maglia di 10×10 m troviamo un incremento del momento del 67%;
- la figura 13 mostra gli spostamenti della struttura di ancoraggio per le forze dello stato «0»: L'interazione elastica nella fase dello stato «0» deve essere considerata durante il progetto di lavoro della struttura della volta allo scopo di controllare le operazioni di pretesione.

I risultati ottenuti suggeriscono ulteriori ricerche che considerano l'influenza di altri parametri strutturali come:

- la variazione di rapporto freccia curvatura;
- la variazione dello stato di prevenzione iniziale;
- la variazione del livello di differenza complessiva tra punti di ancoraggio più alti e più bassi (curvatura totale).

* * *

Gli Autori ringraziano il Dott. G. Tironi per l'assistenza ricevuta nello sviluppo della programmazione elettronica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Samuelli Ferretti, A. Zingali: «Sull'influenza della deformabilità elastica del bordo nelle tensostrutture a doppia curvatura inversa», *Giornale del Genio Civile*, Fasc. 9 ÷ 12, 1973.
- [2] S. Odorizzi, B. Schrefler: «Contributo allo studio di reti di funi pretese entro strutture di bordo elasticamente deformabili», *Costruzioni Metalliche*, n. 3, 1974.
- [3] M. Aizawa, S. Tanaka, H. Tsubota: «Theoretical analysis of pre-tensioned cable structures», I.A.S.S. Pacific Symposium, Japan, 1971.
- [4] M. Saioth, F. Kuroki: «The analysis, design and construction of a cable net suspension structure», I.A.S.S. Pacific Symposium, Japan, 1971.
- [5] R. Alessi, D. Bairaktaris, F. Caridakis, M. Majowiecki e F. Zoulas: «The roof structures of the new sport arena in Athens», I.A.S.S. World Congress, Madrid, 1979.
- [6] M. Majowiecki: «Interactive analysis of membrane grid shells: Substructuring with the mixed method of analysis», I.A.S.S. World Congress, Mar del Plata (R.A.), settembre 1982.