



POLITECNICO DI MILANO - FACOLTA' DI INGEGNERIA  
PROGRAMMA DI ISTRUZIONE, PERMANENTE

Corso di aggiornamento

TENSOSTRUTTURE, STRUTTURE PNEUMATICHE E MEMBRANE

(25-27 maggio 1983)

---

PROGETTAZIONE INTERATTIVA ASSISTITA DAL CALCOLATORE  
IN CAMPO TENSOSTRUTTURALE

Massimo MAJOWIECKI

Istituto di Tecnica delle Costruzioni dell'Università di Bologna

---

Istituzioni promotrici

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA STRUTTURALE DEL POLITECNICO DI MILANO

COLLEGIO DEI TECNICI DELL'ACCIAIO

Direttore del Corso: Prof. Giulio Maier, Politecnico di Milano

PROGETTAZIONE INTERATTIVA ASSISTITA DAL CALCOLATORE  
IN CAMPO TENSOSTRUTTURALE

M. Majowiecki

Premessa

La metodologia progettuale delle tensostrutture è caratterizzata da una fase di definizione strutturale che viene indicata come " stato 0 ". Si tratta di determinare una configurazione geometrica della struttura associata ad uno stato coattivo di pre-trazione, che permette di soddisfare l'equilibrio statico in ogni parte della struttura e sia idonea a garantire la stabilità statica e dinamica nelle diverse condizioni di carico, tenendo conto, inoltre, che la geometria della superficie strutturale deve contemporaneamente soddisfare determinati requisiti architettonici definiti in sede di progetto preliminare.

Questa fase di progetto architettonico-strutturale è alquanto differente dalla corrispondente impostazione tradizionale di progetto che considera la geometria strutturale come dato noto del problema: nelle tensostrutture la geometria della struttura è conseguenza dello stato di pre-sollecitazione.

Per la definizione della geometria della struttura, la costruzione del modello architettonico è un metodo di progettazione atto a fornire in via preliminare, tutte le informazioni volumetriche, distributive ed estetiche della superficie di copertura. Questi tipi di modelli non possono dare che una indicazione visiva, senza dare alcun conforto per quanto riguarda le verifiche di idoneità geometrica e tensionale, atte a garantire il suo funzionamento strutturale. (Fig. 1)

Dovendo essere i tentativi di progetto, in genere, numerosi, la costruzione di modelli architettonici e strutturali comporterebbe tempi e costi notevoli e qualche volta inammissibili in relazione al costo dell'opera.

L'analisi interattiva (elaboratore-progettista) grafica del modello matematico della tensostruttura è, ad oggi il più conveniente metodo di progettazione e verifica architettonico strutturale.

1. TECNICHE INTERATTIVE NELLA PROGETTAZIONE STRUTTURALE

Il modello matematico, associato alle nuove tecniche interattive grafiche di progettazione assistita da calcolatore (C.A.D. = Computer Aided Design; C.G. = Computer Graphics; C.A.A.D. = Computer Aided Architectural Design; C.A.S.D. = Computer Aided Structural Design), permette, mediante l'impiego di calcolatori forniti di un sistema grafico (Display graphics system), una progettazione visiva, rapida, economica e divertente.

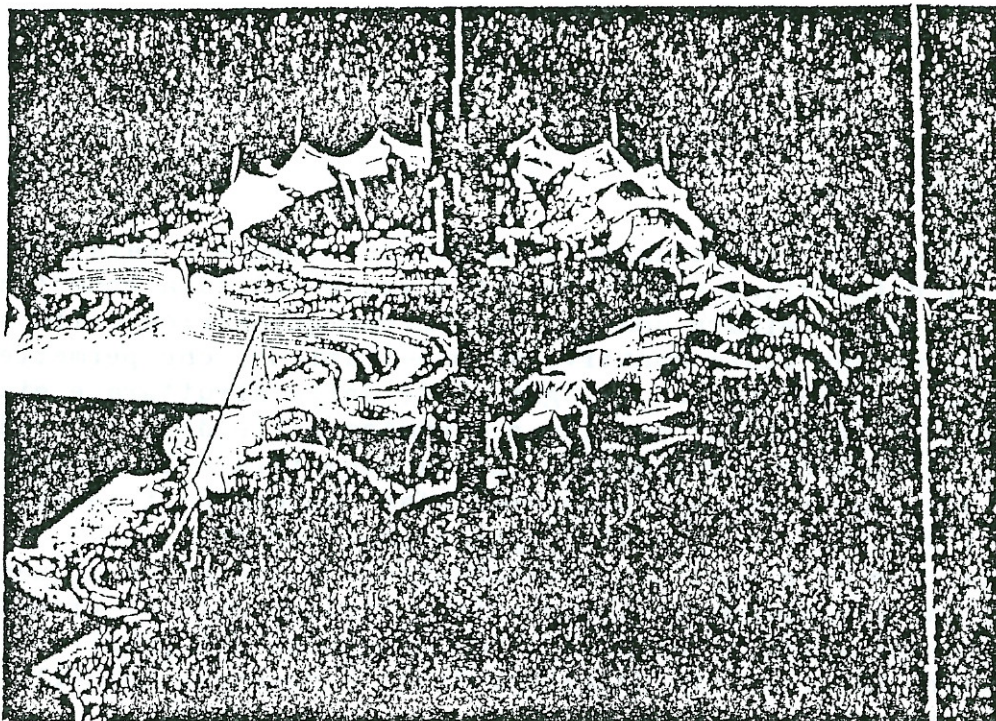


Fig. 1a - Modello architettonico in tessuto elastico. Rappresentazione planisubstrica delle coperture olimpiche di Monaco.

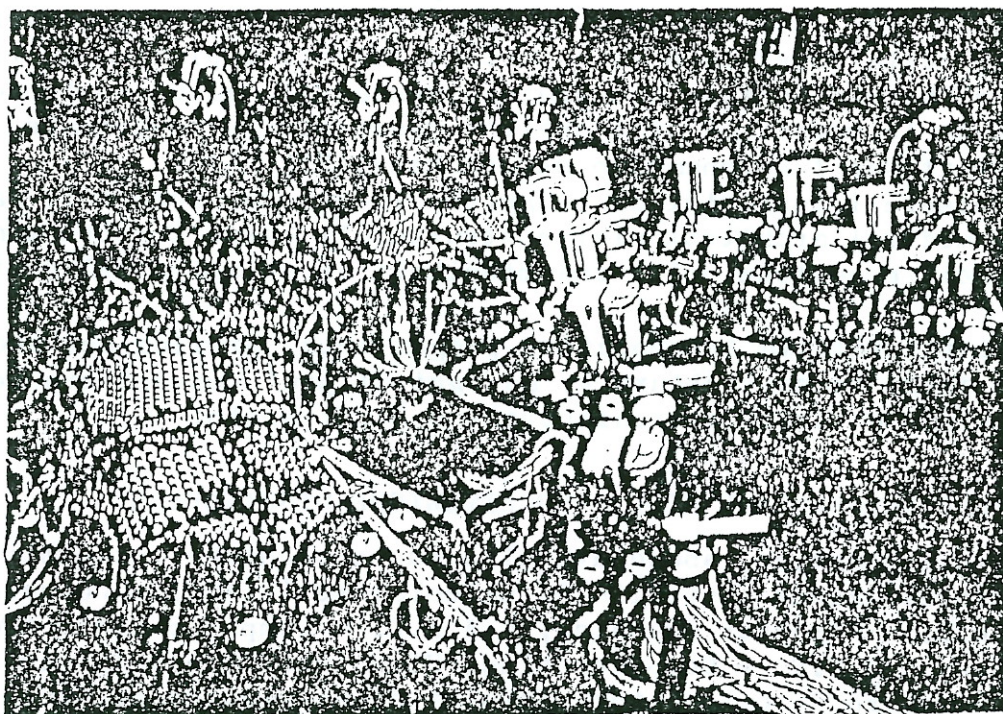


Fig. 1b - Modello strutturale degli stessi impianti (1a). Nella scala adottata gli errori di misura minimi sono stati del 25%. Da questa rilevazione e' iniziato l'impulso per lo studio di un efficiente modello matematico.

Finito il progetto interattivo è possibile ottenere, su carta, mediante plotterizzazione, i risultati geometrici visibili sullo schermo: piante, prospetti, prospettive e le verifiche numeriche del caso in esame. Le tecniche interattive fra uomo e macchina permettono di raggiungere simultaneamente i seguenti obiettivi :

- ottimo rapporto per la fase di analisi (operazione affidata alla macchina utilizzandone la potenza, capacità e velocità nel calcolo automatico delle strutture) e la fase di sintesi (operazione affidata all'uomo responsabile del controllo della validità dei dati della critica dei risultati e degli ordini di grandezza;
- ottimizzazione progettuale per via interattiva come conseguenza logica del ciclo interattivo di progetto (Fig. 2) che permette con estrema

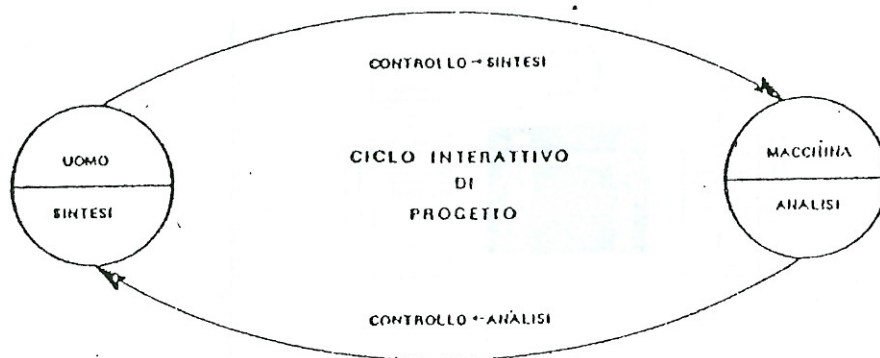


Fig. 2

facilita' e rapidità di modificare i dati e saggiarne le conseguenze mediante successive, iterative verifiche secondo la classica procedura di tentativo, verifica e correzione progettuale fondata sull'esperienza del progettista, il quale ha la capacità di sintetizzare una notevole massa di dati difficilmente esprimibile come problema matematico. In un equilibrato rapporto uomo-macchina la macchina diventa, per mezzo della "interazione", l'utile prolungamento operativo del progettista (creatore e non "verificatore") aumentandone enormemente la capacità, velocità e qualità decisionali; permettendo all'uomo di essere sollevato da pesanti oneri computazionali e ponendolo al centro del processo di sintesi progettuale.

Per potere permettere al progettista architettonico o strutturale di comunicare con la macchina nel linguaggio che gli è proprio (linguaggio grafico) è necessario interporre tra la macchina (elaboratore elettronico) e l'uomo (progettista) delle opportune "interfacce": hardware (macchina) e software (programmi elettronici).

Per permettere il dialogo interattivo è necessario rendere compatibili i due "partners" in modo da ottenere una proficua collaborazione.

Questa compatibilità può essere ottenuta osservando che :

- l'elaboratore è sommariamente un efficiente strumento di analisi di una enorme quantità di dati elementari, tramite una serie di elaborazioni logiche ed aritmetiche condotte su di essi, in tempi brevissimi;
- l'ingegnere strutturista lavora essenzialmente mediante un'opera di sintesi dalla quale deriva la riduzione della realtà costruttiva in un modello teorico analizzabile per via numerica: lo schema strutturale;

- la grafica (disegni di massima ed esecutivi) è il linguaggio simbolico del progettista per rappresentare la realtà'.

Riassumendo, possiamo quindi affermare che l'input e l'output naturali al calcolatore sono essenzialmente numeri o caratteri, mentre l'input o l'output naturali al tecnico sono simboli grafici, cromatici, sonori. La necessaria interfaccia fra elaboratore ed operatore (Fig. 3), sarà

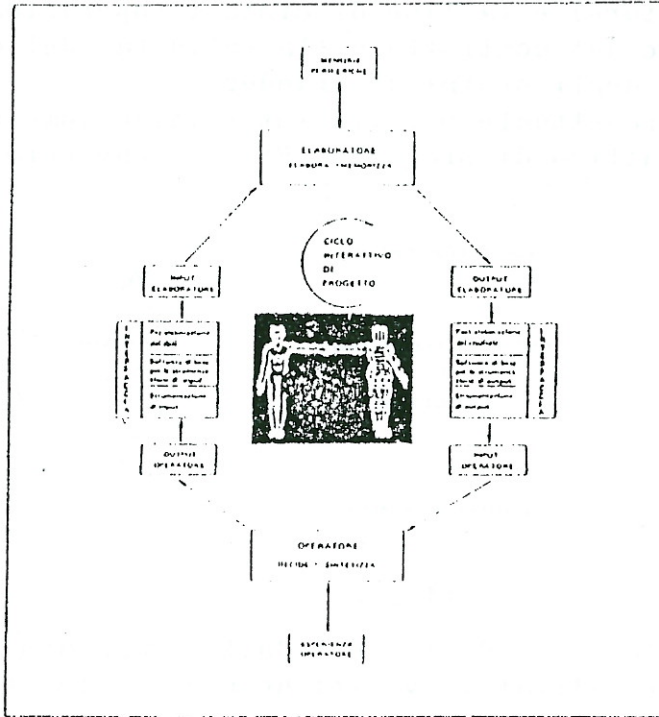


Fig. 3 - Organizzazione metodologica dell'interfaccia operatore - elaboratore

costituita logicamente/fisicamente da tre moduli distinti:

- a) strumentazione hardware dei periferici che costituiscono il legame fisico tra operatore ed elaboratore;
- b) software di base e procedure operative per il migliore sfruttamento delle capacità di questa strumentazione;
- c) pre-processor e post-processor, cioè routine di pre-elaborazione dei dati per adattarli all'input richiesto dal programma di calcolo e di post elaborazione dei risultati per adattarli alle esigenze del singolo tipo di operatore.

Fra interfaccia e programma di calcolo vero e proprio occorrerà poi disporre di un ulteriore filtro costituito da un "driver", cioè da una procedura di smistamento delle direttive decise dall'operatore e dei messaggi inviati dall'elaboratore (fig. 4).

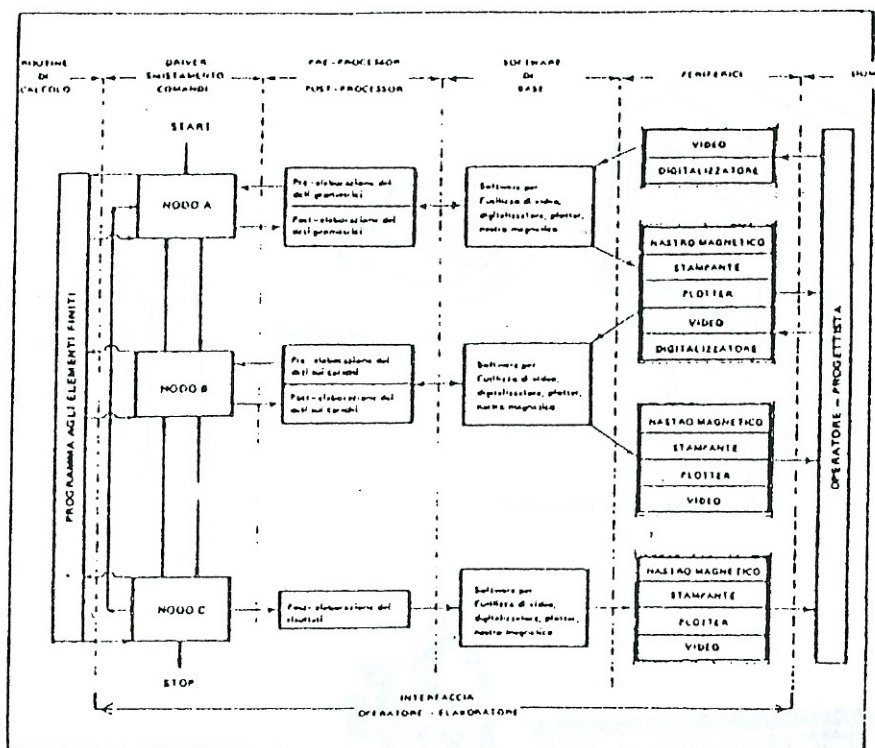


Fig. 4 - Schema a blocchi della struttura logica del programma strutturale.

### 1.1 HARDWARE E SOFTWARE INTERATTIVI

Nell'ambito dell'ingegneria strutturale esistono oggi codici generali per l'analisi delle strutture che sono entrati nella pratica comune dei progettisti strutturali.

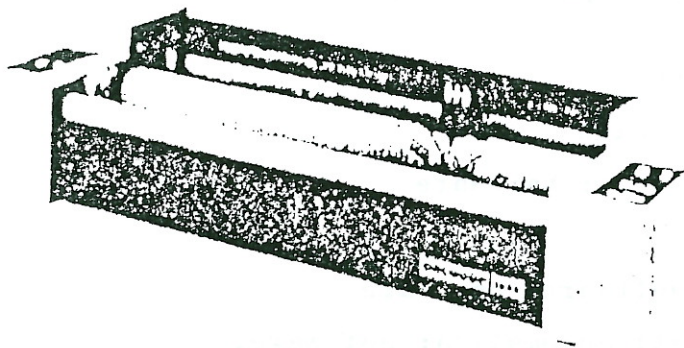
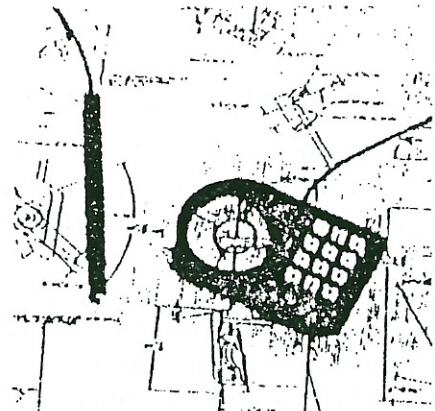
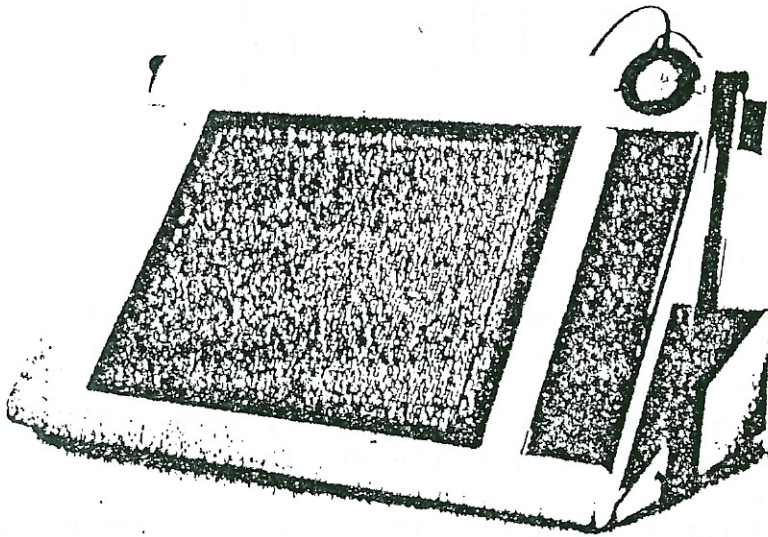
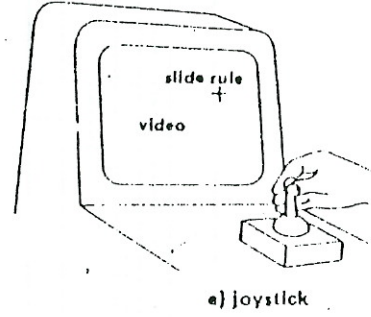
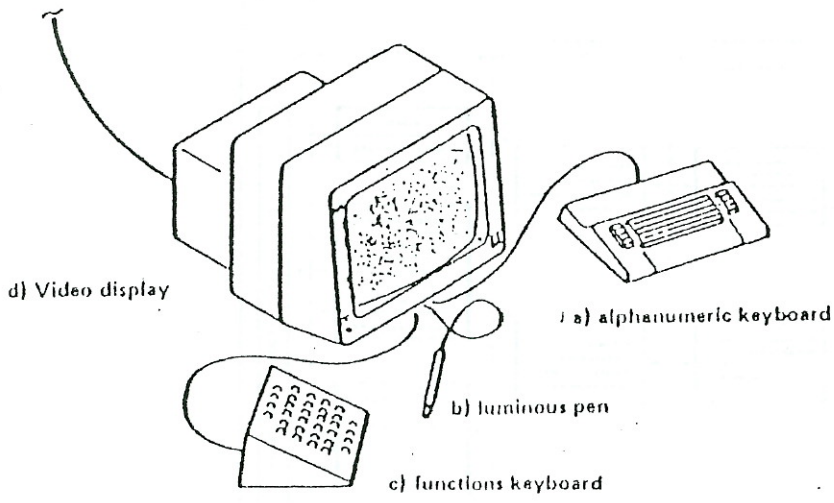
Questi codici oggi usati comunemente (quali STRESS, SAP, ADINA, NASTRAN, BERSAFE, MARC) richiedono generalmente lunghe elaborazioni dei dati tanto in input quanto in output.

Da qui l'importanza della moderna ricerca e sviluppo del software strutturale in quanto riducono la procedura input-output con opportuna pre-elaborazione dei dati (pre-processor) e post-elaborazione dei risultati (post-processor).

Le due fasi di pre e post-elaborazione dei dati e risultati rispettivamente, sono ottenibili con opportune interfacce in hardware (macchina) (Fig. 5), e in software (programmi).

Mediante le tecniche interattive la pre-elaborazione dei dati puo' essere eseguita principalmente con:

- tastiera alfanumerica: hardware
- penna luminosa e joystick: hardware
- tavola analogica o digitalizzatore: hardware
- video grafico: hardware
- menu e tastiera di funzioni: software, hardware
- programmi di generazione dei dati automatica: software.



La post-elaborazione dei risultati puo' essere ottenuta mediante:

- video grafico: hardware
- tavola grafica o plotter: hardware
- programmi di rappresentazione grafica dei risultati: software.

La moderna disponibilita' dei linguaggi scientifici per la comunicazione con la macchina e le nuove generazioni di minicalcolatori estremamente potenti e a costi sempre piu' accessibili ci permettono di costituire una combinazione uomo-macchina secondo una configurazione interattiva come schematizzato nella Fig. 6.

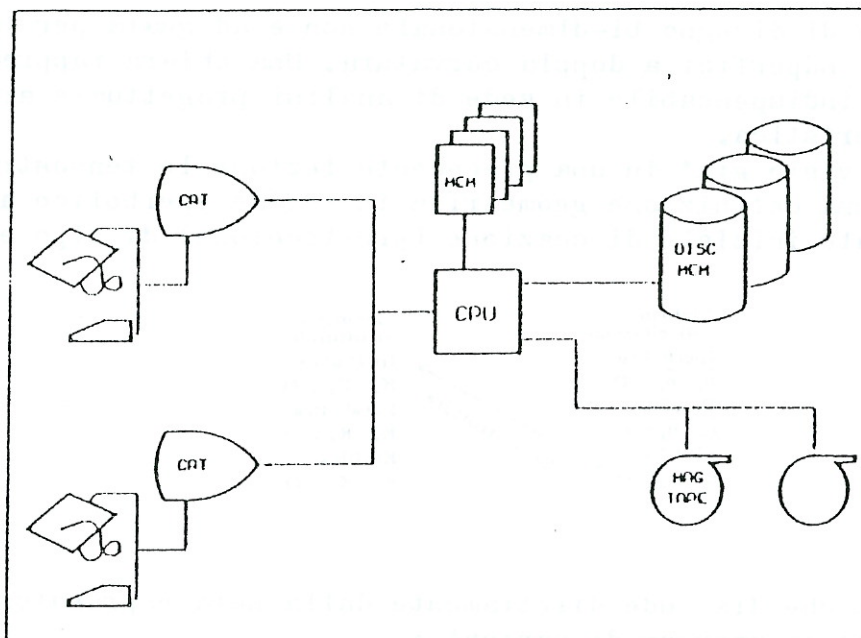


Fig. 6 Sistema grafico interattivo

Per mezzo di questa configurazione interattiva (interfaccia software + hardware) la comunicazione tra uomo e calcolatore avviene in linguaggio umano, intendendo con questo l'insieme di dati numerici, simbolici e grafici usati dall'uomo comunemente nell'ambito della propria tecnica. La comunicazione di tipo grafico, permessa dalle tecniche interattive (IG), è sostanzialmente la piu' importante nel campo dell'ingegneria strutturale.

L'immissione dati avviene secondo il modo naturale di operare del pro-



gettista mediante schizzi geometrici che possono essere rilevati per mezzo del digitalizzatore.

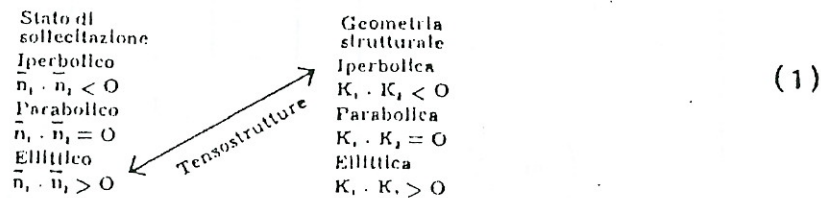
## 2. LA PROGETTAZIONE INTERATTIVA - IL PROGRAMMA RETE

La tecnica interattiva di progettazione assume particolare importanza nel campo delle tensostrutture, membrane e strutture pneumatiche, permettendo di risolvere notevoli problemi di gestione progettuale quali:

- la rappresentazione grafica di superfici;
- la ricerca dello stato "0", o configurazione geometrico-tensionale iniziale;
- la verifica dello stato di sollecitazione e deformazione.

La tecnica di disegno bi-dimensionale non è adeguata per la rappresentazione di superfici a doppia curvatura. Una chiara rappresentazione grafica è indispensabile in sede di analisi progettuale architettonica ed ingegneristica.

Come si è visto già in una precedente lezione le tensostrutture richiedono una definizione geometrica in regime iperbolico accompagnata da uno stato iniziale di coazione (pre-tensione) di tipo ellittico;



condizione che discende direttamente dalla nota espressione del regime di membrana in assenza di carichi :

$$\frac{\bar{N}_1}{K_1} + \frac{\bar{N}_2}{K_2} = 0 \quad (2)$$

con :

$$K_1 = \text{raggio di curvatura in direzione 1; (3)}$$

$$K_2 = \text{" " " " " " 2; (4)}$$

$\bar{N}_1; \bar{N}_2$  = stato di tensione in direzione 1 e 2 rispettivamente.

Il controllo, e la scelta nell'ambito di queste condizioni, accompagnate a richieste geometriche di funzionalità architettoniche (vedi 4.1) richiedono la possibilità di una veloce risposta ad un numero notevole di tentativi progettuali.

Il controllo della funzionalità statica e dinamica della struttura richiede anch'esso la possibilità di una veloce e versatile interazione uomo-macchina in modo da ottenere, in ogni punto della struttura, le ne

cessarie informazioni sullo stato di sollecitazione e deformazione. I particolari vantaggi di una organizzazione interattiva di progetto e verifica delle tensostrutture risiedono essenzialmente nel risparmio di tempo e costi di progettazione, essenziali per la propria affermazione commerciale. Per i primi progetti di tensostrutture i costi di progettazione sono stati altissimi (p. es. la copertura dello stand della Germania Federale a Montreal ha richiesto 12.000 ore di laboratorio). Via modello matematico e C.A.D. i costi si riducono drasticamente. Dal diagramma di flusso di Fig. 7 si puo' osservare che il cuore della

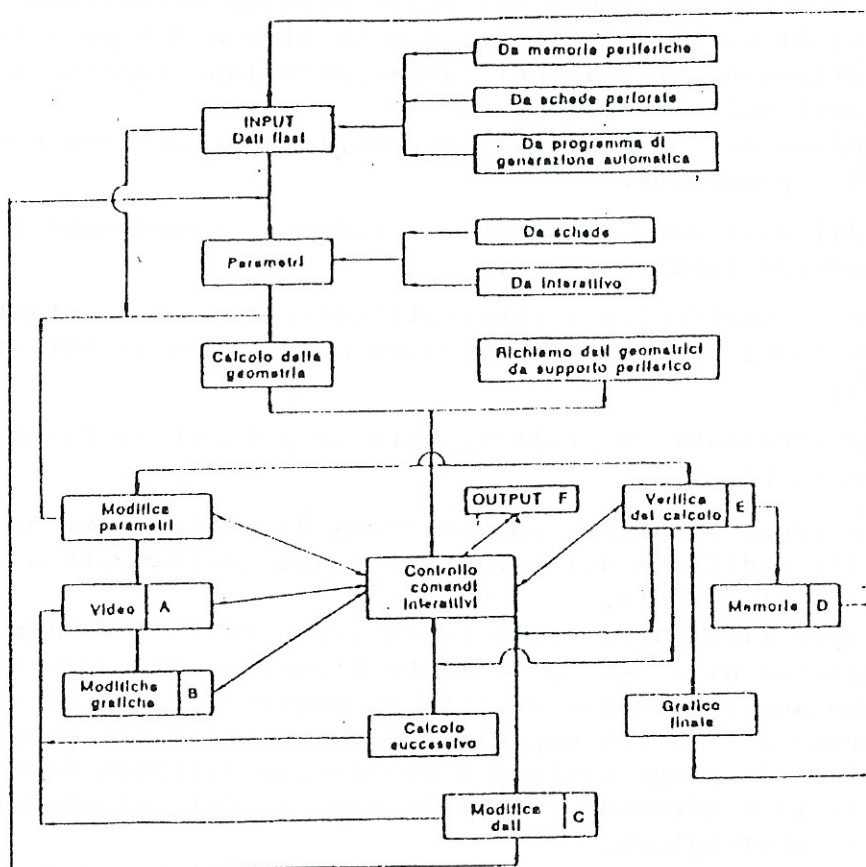


Fig. 7 Diagramma di flusso dei comandi interattivi del programma RETE

struttura interattiva del programma di calcolo risiede nel blocco di controllo dei comandi interattivi. Immessi i dati fissi (es. coordinate dei punti di ancoraggio), che possono provenire da un programma di generazione automatica, da memorie periferiche o semplicemente da schede ed i dati parametrici che servo-

no ad attivare una precisa sequenza di calcolo, è possibile ottenere un primo risultato sul video (blocco A).

Sul video è possibile controllare immediatamente da un semplice esame visivo la correttezza dei dati. In questo caso basta fermare il calcolo alle prime iterazioni e, se il risultato è negativo, mediante il blocco C, è possibile modificare i dati sbagliati e ripartire con il calcolo.

Raggiunto l'equilibrio con i dati preliminari si esamina la tensostruttura sul video dove si possono visualizzare prospetti ed assonometrie. Mediante il blocco B si possono eseguire rotazioni, traslazioni e cambiamenti di scala permettendo una prima precisa valutazione progettuale, dal punto di vista geometrico. Con il blocco E è possibile, sempre sul video, ottenere informazioni sulla precisione raggiunta e sui valori degli sforzi nella membrana.

Concluso l'esame del primo risultato completo (geometria-stato di sollecitazione) è possibile:

- cambiare dei dati come la pressione interna, coordinate dei punti di vincolo, sforzi iniziali, ecc.;
- conservare su periferico i risultati ottenuti per eventuali utilizzi successivi quali base di procedimento automatico di ottimizzazione (blocco D);
- ottenere i risultati su plotter, hard copy (grafico finale) e su stampante (blocco F).

Nel caso che venga richiesta una sequenza di ottimizzazione si devono eseguire delle modifiche dei parametri e successivamente ordinare il proseguimento del calcolo.

Da quanto sopra risulta evidente la notevole economia della organizzazione interattiva di progetto mediante l'ausilio di macchine veloci che costituiscono una estensione mentale operativa del progettista aumentandone enormemente la sua capacità e la qualità del progetto.

Le tipiche fasi di progettazione e successiva verifica sono enormemente accelerate in confronto al normale impiego del calcolatore come strumento di input-output.

I pre e post-processor che permettono al progettista di descrivere e manipolare interattivamente i parametri e funzioni di progetto usando le tecniche di C.G. (computer graphics) in tempo reale, sono convenientemente attivate mediante l'impiego di una tavola grafica o digitalizzatore e da un MENU' di comandi interattivi (Fig. 8).

Mediante il solo impulso trasmesso dalla penna magnetica sulla casella o matrice delle funzioni (MENU') è possibile attivare delle sub-routines o macrocomandi quali :

ING	AGG	RID VINC		JUSTA HODO	AGG	ANN	ELIM	ITER 1	→	ORDIN	STAMP DATI	STOP
SCALA MVE	INS	LIB	$X=Z$	ASS X	ORD ORIZ	ORD VERT	HUM	ITER 2	↑	ARCE	STAMP RIS.	CALCOLO
VAR SCALA	ANN	$X=$	$X=Y=$	ASS Y	ASS $\alpha$	$\alpha$ CORR	MOD $\alpha$	DIS $\alpha$	○	ARC CARIC	ARC GEOM	3D
ARR	ELIM	$Y=$	$Y=Z$	ASS $X_H$	ASS $AK$	$AK$ CORR	MOD $AK$	DIS $AK$	ELIM	RIC CARIC	RIC GEOM	7 0 9 4 5 6
PREC TT	NUM	$Z=$	$X=Z$	ASS $Y_H$	ASS $DT$	$DT$ CORR	MOD $DT$	DIS $DT$	DIS CARIC	ARB. CARIC	INTES	1 2 3 0 . - 1

Fig. 8 Menu' interattivo grafico del programma RETE

INC :           ingrandimento della figura sullo schermo;  
 SCALA INIZ : ritorno della scala iniziale della figura rappresentata;  
 VAR. SCALA : variazione di scala o parametro;  
 ARR :           arrotondamento nella precisione di rilievo coordinate tra  
                   mite digitalizzatore;  
 PNEC :          precisione;  
 OTT :           ottimizzare la dimensione di visualizzazione;  
 TT :            trasferimento alla tastiera;  
 AGG :           aggiungi un nodo o asta;  
 INS :           inserisce un nodo o asta;  
 ANH :           annulla " " " " ;  
 ELIM :          elimina " " " " ;  
 NUM :          visualizza sullo schermo la numerazione;  
 RID. VINC : ridefinisce un vincolo;  
 LIB :          introduce un grado di liberta';  
 ORD. ORIZZ : generazione automatica di una mesh in direzione orizzontale;  
 ORD. VERT : idem in verticale;  
 ITER 1 : attiva sequenza di ottimizzazione sulle lunghezze (vedi 4.1);  
 ITER 2 : idem sugli sforzi (vedi 4.1);  
 ITER 3 : idem sulle lunghezze e sforzi contemporaneamente (vedi 4.1);  
 ASSAK : assegna area ad un'asta generica;  
 AK corr. : " " ad un direttorio di aste;  
 DIS DT : assegna variazione di temperatura;  
 ARC CARIC : archivia condizioni di carico;  
 ARC GEON : " geometria;  
 CALCOLO : manda in esecuzione il calcolo;  
 3 D : visualizzazione tri-dimensionale dei dati;

### Tabella dei comandi interattivi

## 3- SCHEMATIZZAZIONE FISICO-MATEMATICA DELLA STRUTTURA

Il programma strutturale organizzato interattivamente prevede il seguente modello fisico-matematico.

- 1 - Analisi mista mediante il metodo delle forze e degli spostamenti;
- 2 - Analisi mediante sottostrutturazione funzionale:  
le sottostrutture vengono definite secondo il funzionamento "hardening" o "softening" nell'ambito della struttura globale;
- 3 - Analisi delle strutture o sottostrutture in regime di grandi spostamenti e piccole deformazioni, ed in regime di "hardening" geometrico e materiale, mediante il Metodo delle forze;
- 4 - Analisi delle strutture o sottostrutture in regime di piccoli spostamenti ed in regime di "softening" geometrico e materiale mediante il metodo dell'equilibrio;
- 5 - Sottostrutturazione fisica mediante la definizione di sottostruttura elementare Funce la quale è formata da un insieme di elementi finiti lineari ad asta.

## 4- LA STRUTTURA FUNE

## 4.1 LO STATO "0"

Nel caso di strutture spaziali complesse la ricerca dello stato "0" è essenziale. Numerosi lavori sono stati dedicati a questo problema

Per quanto riguarda le funi singole, nella letteratura tecnica lo stato "0" è dato per definizione, quale dato noto per problema della ricerca del susseguente stato di sollecitazione. In numerose applicazioni reali non è possibile definire uno stato "0" senza una precisa ricerca di una geometria iniziale equilibrata.

Dal punto di vista costruttivo p.es., normalmente viene richiesta che una fune, di una determinata lunghezza, venga marcata (con o senza uno stato di pre-tensione al banco), in corrispondenza dei luoghi dove saranno applicati i carichi; la lunghezza totale e parziale della fune inerte, dovrà essere determinata in funzione di uno qualunque degli stati di caricamento che venga definito quale STATO '0'. Questo stato geometrico e di sollecitazione iniziale può essere ottenuto, nel modo più generale, in accordo con la pratica costruttiva moderna, mediante l'imposizione dell'equilibrio di un insieme strutturale formato da aste-nodi (fig. 9) con, eventualmente, condizioni o vincoli accessori di tipo geometrico o di tipo deformativo - tensionale

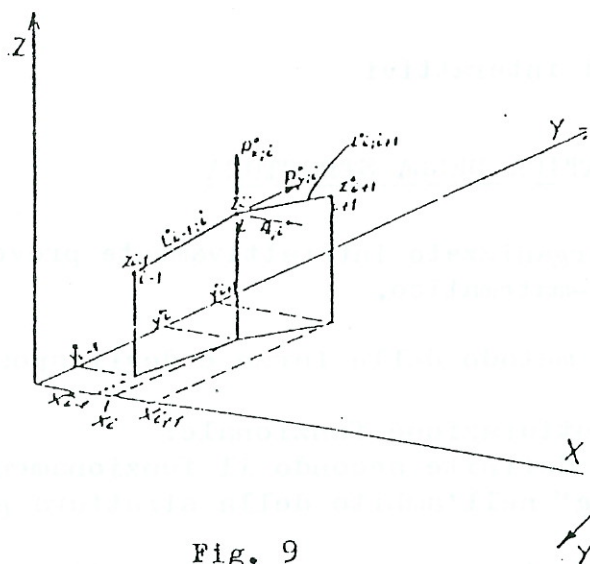


Fig. 9

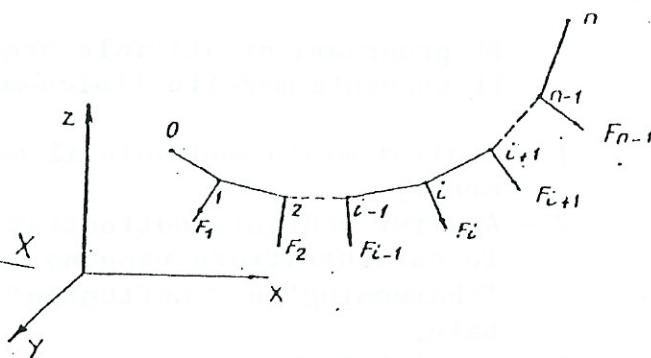


Fig. 10

L'energia potenziale totale delle aste in regime monoassiale, in presenza di uno stato iniziale di tensione ( $\sigma$ ), si può esprimere come segue :

$$\begin{aligned}
 U^0 &= \sum_{i=1}^{i=i+1} \frac{1}{2} \int_V \sigma^0 \epsilon dv + (D_i)^T (P_i^0) = \\
 &= \sum_{i=1}^{i=i+1} \frac{1}{2} S^0 (L - L^0) + (D_i)^T (P_i^0)
 \end{aligned} \quad (4)$$

dove :

$\sigma^0$  = stato di tensione iniziale sull'asta generica

$\epsilon^0$  = stato di deformazione iniziale sull'asta generica

$D_i$  = vettore di movimento geometrico

$P_i^0$  = carichi di stato "0" sul modo generico "i"

Alle condizioni (1) sono associate, nei problemi pratici piu' correnti, le seguenti condizioni o vincoli accessgri :

a) Condizioni sulla geometria iniziale  $\varphi(x, y, z) = x_i - \bar{x}_i = 0$  (5)

b) Condizione sulla costruzione delle lunghezze delle aste;  
 $\varphi(x, y, z) = L_{i; i+1} - \bar{L}_{i; i+1} = 0$  (6)

$\bar{L}_{i; i+1}$  = valore assegnato sul tratto  $i; i+1$   $\begin{cases} i = 1 - RL \\ RL M \end{cases}$

c) Condizioni sugli sforzi nelle aste

$$\varphi(S) = S_{i; i+1}^0 - \bar{S}_{i; i+1}^0 \quad \begin{cases} i = 1 - RS \\ RS M \end{cases} \quad (7)$$

$\bar{S}_{i; i+1}$  = Sforzo assegnato sul tratto  $i; i+1$

d) Condizione sulla lunghezza indeformata delle aste

$$\varphi(x; y; z) = L_{i; i+1}^0 - \frac{K_{i; i+1}}{K_{i; i+1} + S_{i; i+1}} - \bar{L}_{i; i+1}^0 = 0 \quad (8)$$

con  $K_{i; i+1}$  = rigidezza estensionale dell'asta  $i; i+1$

$\bar{L}_{i; i+1}$  = lunghezza inerte dell'asta  $i; i+1$  quale lunghezza di pre-fabbricazione standard

la soluzione delle (1), associate ai vincoli (2); (3) o (4), puo' essere effettuata trovando il minimo della funzione reale  $U^0(x; y; z)$  di  $n$  variabili soggetta ai vincoli  $m < n$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x; y; z; s) &= 0 \\
 \varphi_2(x; y; z; s) &= 0 \\
 \varphi_m(x; y; z; s) &= 0;
 \end{aligned} \quad (9)$$

differenziabili nello spazio  $n$  variabili.

Non essendo possibile, in ordine pratico di eliminare dalle (4) (j)  $m$  variabili direttamente, è condizione necessaria per ottenere un massimo o minimo della  $U^0(x; y; z; s)$  soggetta ai

vincoli (J) che, :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0 \quad (10)$$

dove :

$$\Phi(X_1; \dots; X_n) = U^0(X; Y; Z; S) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_j(X; Y; Z; S) \quad (11)$$

$\lambda$  = Moltiplicatori di Lagrange

E' possibile ottenere la nm incognite,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (X; Y; Z)_i & i = 1-n \\ \lambda_j & j = 1-m \end{array} \right.$$

delle nm equazioni (9) e (11)

#### 1.1 LA RISOLUZIONE NUMERICA DELLO STATO "0"

Dopo la differenziazione (7) si ha a disposizione il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0 \\ \phi_1(X; Y; Z; S) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(X; Y; Z; S) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

La prima parte a sinistra delle (12) rappresentano le condizioni di equilibrio espresse in forma di rigidità geometrica.

Le incognite globali nel problema generale della ricerca di stato "0" sono le  $3n$  coordinate dei nodi, più gli  $m$  sforzi sulle aste. A disposizione abbiamo, in genere,  $3n+R$  equazioni giacchè le condizioni, o vincoli progettuali accessori, non sono necessariamente  $R = m$ .

Come già visto precedentemente [15] il problema generale dello stato "0" coinvolge simultaneamente tutte le incognite (geometriche + stato di sollecitazione) il che equivale ad effettuare una fase tipica di progettazione strutturale.

Essendo le incognite globali del problema  $3n+m$  si hanno le seguenti

possibilita' limite :

a) Noto lo stato di sollecitazione, trovare la geometria del sistema strutturale che equivale a :

- note  $m$  valori di  $(S)$  sforzi nelle aste
- trovare  $3n$  coordinate dei nodi  $(R)$

Problema possibile disponendo di  $3n$  equazioni di equilibrio pari al numero di incognite

b) Nota la geometria del sistema, trovare lo stato di sollecitazione percio' :

- noti  $3n$  coordinate dei nodi  $(k)$
- trovare  $m$  valori di  $(S)$  nelle aste

Il problema non è determinato giacchè  $m < 3n$ , l'indeterminazione è pari a  $3n - m$ .

Per la soluzione di questi problemi, già affrontati, si veda [15].

#### 4.2 L'ELEMENTO FUNE SOGGETTO AD AZIONE DI CARICO GENERALIZZATO

Il problema statico più generale relativo all'elemento strutturale fune si presenta nei seguenti termini: nota la configurazione iniziale della fune soggetta ad un certo sistema di carichi e la legge costitutiva del materiale della fune, determinare la configurazione che la fune assume quando sia intervenuta una "variazione di stato" (sia cioè mutato il sistema di carico o introdotte deformazioni impresse, stati di coazione e variazioni delle condizioni al contorno.

Soluzioni esatte del problema della statica delle funi sono conosciute solo per particolari stati di carico contenuti in un piano [16].

Diversi metodi numerici approssimati sono stati sviluppati e risolti nel campo della fune singola tanto, per problemi bi-dimensionali [17] quanto nello spazio [18].

In alcuni recenti lavori [19, 20], esistono ancora alcune limitazioni importanti specialmente per poter usare l'elemento fune quale sottostruttura di un sistema di funi più complesso. Le limitazioni più significative sono:

- la mancanza di uno studio preciso delle condizioni geometriche e tensionali iniziali della fune;
- limitazioni nella possibilita' di introdurre cedimenti vincolari giacchè i metodi si basano sulla ricerca iterativa delle forze d'ancoraggio di uno degli estremi considerando fissa la distanza tra gli ancoraggi;
- difficolta' nella definizione di vincolamenti interni fra una fase di carico ed una successiva; condizione necessaria per lo studio di alcuni problemi strutturali quali: problemi di contatto di pipe-lines sottomarine, trasporti mobili, Blondel, ecc.. La definizione di vincoli provvisori interni, in fase iterativa di calcolo è indispensabile per la sottostrutturazione in sistema misto di analisi.

Tutti i metodi proposti, ad iniziare dai classici lavori di Michalos e Birsteill [17] e H.K. Bandel [18], agli altri, ed il metodo di seguito proposto, sono di tipo iterativo e vanno sotto il nome di metodo delle reazioni immaginarie.

Questo metodo propone la soluzione iterativa del problema dell'equi



librio dei sistemi articolati semplicemente connessi in regime unilaterale di sforzi ( $S > 0$ ).

Con la fig. 10, consideriamo un sistema costituito da  $n$  aste, con  $n > 2$ , tale che ad ogni modo concorrono due sole aste.

Siano  $1, 2, \dots, i, \dots; n+1$  i modi ed  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_{n+1}$  le forze attive corrispondenti applicate.

Per ogni nodo intermedio valgono le seguenti condizioni di equilibrio vettoriali :

$$\bar{F}_i + \bar{S}_{i,i-1} + \bar{S}_{i,i+1} = 0, \quad \text{per } i=2, 3, \dots, n, \quad (13)$$

dove  $S_{i,i+1}$  rappresenta lo sforzo che sul nodo  $i$  esercita l'asta  $i; i+1$ .

Per l'equilibrio dei punti estremi dovrà essere :

$$\bar{F}_1 + \bar{S}_{12} = 0, \quad \bar{F}_{n+1} + \bar{S}_{n+1,n} = 0 \quad (14)$$

Le (14) sono le equazioni ai limiti.

L'analisi dello stato di deformazione e sollecitazione viene svolta in due fasi :

1 - Fase anelastica : in questa fase si ricerca la posizione di equilibrio della struttura fune considerando le aste inestensibili. Questa fase viene attivata in campo di grandi spostamenti di tipo geometrico (p.es. strutture pneumatiche - strutture internamente ipostatiche).

2 - Fase elastica : terminata la fase anelastica o, considerato che la struttura è sufficientemente "rigida", si tiene in considerazione la componente elastica sullo stato di deformazione e di tensione.

Conosciuto lo stato "0" e perciò :

$$x_i; y_i; z_i; P_{xi}; P_{yi}; P_{zi} \quad \text{per ogni nodo } i$$

ed,

$$S_{i;i+1} ; L_{i;i+1} \quad \text{per ogni asta,}$$

si consideri ora una variazione di stato.

Le equazioni di equilibrio sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{[\bar{S} + \Delta \bar{S}]_{i;i+1}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i;i+1}} \frac{[\Delta x + \Delta u]_{i;i+1}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i;i+1}} - \frac{[\bar{S} + \Delta \bar{S}]_{i-1;i}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i-1;i}} \frac{[\Delta x + \Delta u]_{i-1;i}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i-1;i}} = [\bar{P}_x + \Delta P_x]_i \\ \text{idem per } y \\ \text{idem per } z \end{array} \right. \quad (15)$$

per ogni nodo interno  $i$ .

chiamando ora con ,

$$\frac{[\bar{S} + \Delta \bar{S}]_{i;i+1}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i;i+1}} = k_{i;i+1} ; \quad \frac{[\bar{S} + \Delta \bar{S}]_{i-1;i}}{[\bar{L} + \Delta \bar{L}]_{i-1;i}} = k_{i-1;i} \quad (16)$$

e, (17)

$$q_{i-1;i} = -k_{i-1;i} ; \quad q_{i;i} = -[k_{i-1;i} + k_{i;i+1}] ; \quad q_{i;i+1} = -k_{i;i+1}$$

Si ha la nuova scrittura delle (15).

$$\begin{cases} q_{i-1,i} U_{i-1} + q_{i,i} U_i + q_{i,i+1} U_{i+1} = \bar{P}_{x,i} \\ \text{Idem per } y \\ \text{Idem per } z \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Dove } \bar{P}_{xi} = \bar{P}_{xi} = [\bar{P} + \Delta P]_{x,i} - k_{i-1,i} \Delta x_{i-1,i} + k_{i,i+1} \Delta x_{i,i+1} \quad (19)$$

In forma condensata possiamo scrivere :

$$[q] \cdot \{\sigma\} = \{\bar{P}\} \quad (20)$$

dove  $[q]$  può essere definita quale matrice delle forze. La matrice  $[q]$  è tridiagonale.

Separatamente, le variazioni di lunghezza delle aste sono espresse dalla,

$$\Delta L_{i,j} = \left[ \frac{\Delta S_{i,j}}{E \cdot A} + \alpha \Delta T \right] \cdot L_{i,j} \quad (21)$$

In fase anelastica le (20) suggeriscono una risoluzione che corrisponde ad un caso particolare della metodologia di stato "0". Considerando  $\Delta L_{i,j} = 0$  il problema è quello di trovare gli spostamenti  $(u, v, w)_j$  e lo stato di sollecitazione  $S_{i,j}$  considerando costante la lunghezza delle aste (vedi punto 4.1).

Considerato che  $\sigma = m$ , non deve essere associato nessun principio di minimo essendo unica la soluzione. In questo caso le (18) suggeriscono un processo iterativo basato principalmente sulla proprietà della matrice tridiagonale delle densità di sforzo.

La procedura risolutiva iterativa consiste nei seguenti passi :

- I) Si applicano i carichi  $P$ ;
- II) Si dà un valore di primo tentativo alle  $q_{i,j}$  (è possibile partire anche dal valore di  $q_{i,j}$  di stato "0");
- III) Si risolve la (18) tridiagonale;
- IV) Ottenuti gli spostamenti si controllano i valori di  $L_{i,j}$ ; Si modificano i valori di  $q_{i,j}$  in modo da soddisfare le condizioni  $L_{i,j} = \text{cost}$ .
- V) Si ritorna alla fase III finché, dopo il controllo di due valori consecutivi, non si sia raggiunta una precisione richiesta.

Raggiunta la convergenza sarebbe possibile variare la lunghezza delle aste con le (21), ed iniziare ancora il ciclo iterativo sopra proposto. In questo modo potrebbe essere calcolata anche la fase elastica.

Per ottenere una maggiore precisione di calcolo è preferibile ottenere una correzione iterativa operando sulla determinazione degli sforzi.

Considerando le condizioni di equilibrio globali in corrispondenza dei punti di ancoraggio si ha :

$$R_{x,0} = \frac{1}{z_n} \sum_{i=1}^{i=n-1} (\overline{[P+\Delta P]}_{x,i} [\overline{z_n - (z+w)}]_i + \overline{[P+\Delta P]}_{x,i} (x+u)_i)$$

$$R_{x,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \overline{[P+\Delta P]}_{x,i} - \overline{[R_{x,0}]}$$

$$R_{y,0} = \frac{1}{z_n} \sum_{i=1}^{i=n-1} (\overline{[P+\Delta P]}_{y,i} [\overline{z_n - (z+w)}]_i + \overline{[P+\Delta P]}_{z,i} (y+r)_i) \quad (22)$$

$$R_{y,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \overline{[P+\Delta P]}_{y,i} - \overline{[R_{y,0}]}$$

$$R_{z,0} = \overline{[R_{x,0}]} \frac{[\overline{z+w}]_1}{[\overline{x+u}]_1}$$

$$R_{z,n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \overline{[P+\Delta P]}_{z,i} - \overline{[R_{z,0}]}$$

Le componenti di sforzo sono :

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{[T+\Delta T]}_{x;i,j} &= \overline{[R_{x,0}]} - \sum_1^i \overline{[P+\Delta P]}_{x,i} \\ \overline{[T+\Delta T]}_{y;i,j} &= \overline{[R_{y,0}]} - \sum_1^i \overline{[P+\Delta P]}_{y,i} \\ \overline{[T+\Delta T]}_{z;i,j} &= \overline{[R_{z,0}]} - \sum_1^i \overline{[P+\Delta P]}_{z,i} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Lo sforzo nell'asta generica è così',

$$\overline{[S+\Delta S]}_{i,j} = (\overline{[T+\Delta T]}_{x;i,j}^2 + \overline{[T+\Delta T]}_{y;i,j}^2 + \overline{[T+\Delta T]}_{z;i,j}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

In fase elastica, considerando l'aggiornamento degli sforzi come perno iterativo si hanno le seguenti fasi di calcolo :

- I) elaborazione dei carichi  $\Delta P_i$
- II) calcolo degli  $S_{i,j}$  con le (22); (23) e (24);
- III) calcolo degli spostamenti  $(u;v;w)_i$  con le (18);
- IV) calcolo dei  $\Delta L_{i,j}$  con le (21);
- V) iterazione anelastica con  $[L+\Delta L]_{i,j} = \omega$  fino a convergenza;

VI) ritorno a II);

VII) controllo convergenza sugli sforzi.

L'onere di calcolo è di occupazione di memoria, è minimo come si può osservare dalle varie fasi di calcolo sopra descritte. In particolare la fase III), che coinvolge la risoluzione di un sistema di  $3 \cdot (n-1)$  equazioni, trae vantaggio dalla struttura tridiagonale della matrice [9].

La risoluzione di tale sistema equivale ad una semplice back-sostituzione. Come si può osservare, la sottostruttura fune, è stata risolta tenendo separate le condizioni di equilibrio da quelle di compatibilità.

#### 5- ANALISI DI UN SISTEMA STRUTTURALE MEDIANTE IL METODO DI SOTTOSTRUTTURAZIONE MISTA.

In modo da illustrare il metodo, si prenda in considerazione una struttura reale (fig. 11a) costituita da un sistema di funi interne ed una struttura esterna perimetrale d'ancoraggio.

La notevole differenza di rigidità tra le due parti strutturali genera dei problemi numerici che possono essere risolti, in parte, con opportuni accorgimenti. Questi accorgimenti sono dipendenti dalla natura della struttura e perciò poco generali. In [24] sono illustrati alcuni suggerimenti di strategia numerica, fondati sull'esame della natura delle matrici di rigidità, e da considerazioni desunte da alcuni risultati numerici quali:

- necessita' di individuare una soluzione approssimata quale configurazione d'unesco del calcolo mediante condensazione di gradi di libertà sulla rete di funi;
- alterazioni delle caratteristiche di rigidità degli elementi di rete a contatto con la struttura di bordo giacchè gli elementi più corti di notevole rigidità nel piano tangente della struttura, rende altamente mal condizionata la zona della matrice di rigidità relativa all'interno dei nodi interessati;
- introduzione di una legge di distribuzione degli spostamenti, impressi dalla deformazione del bordo sulla rete di funi in modo da evitare divergenze di calcolo e, in caso di convergenza diminuire i tempi di elaborazione;
- rafforzamenti di calcolo fuori ciclo del bordo e della rete.

In modo da evitare i sopra indicati problemi numerici prodotti, come abbiamo visto al punto, dalla disomogenea definizione del modello fisico-matematico della struttura, consideriamo di sezionare la struttura nelle seguenti parti fig. :

$S_{I;1}$  = sottostrutture relativamente più rigide con funzionamento geometrico e materiale softening, da analizzare mediante il metodo degli spostamenti;

$S_{II,i}$  = sottostrutture di tipo fune posizionate su struttura a rete con dominante comportamento geometrico in hardening, da analizzare mediante il metodo delle forze.

Consideriamo adesso le sottostrutture I e II collegate tra loro nello insieme di punti B (vedi fig. 11b). Separando gli spostamenti si ha :

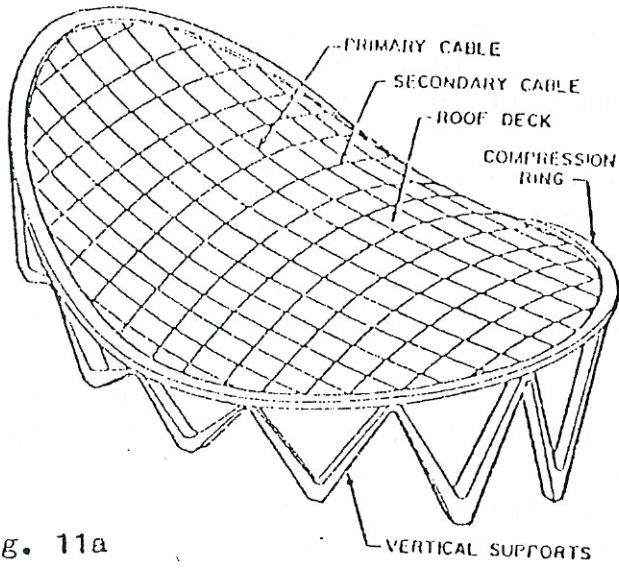


Fig. 11a

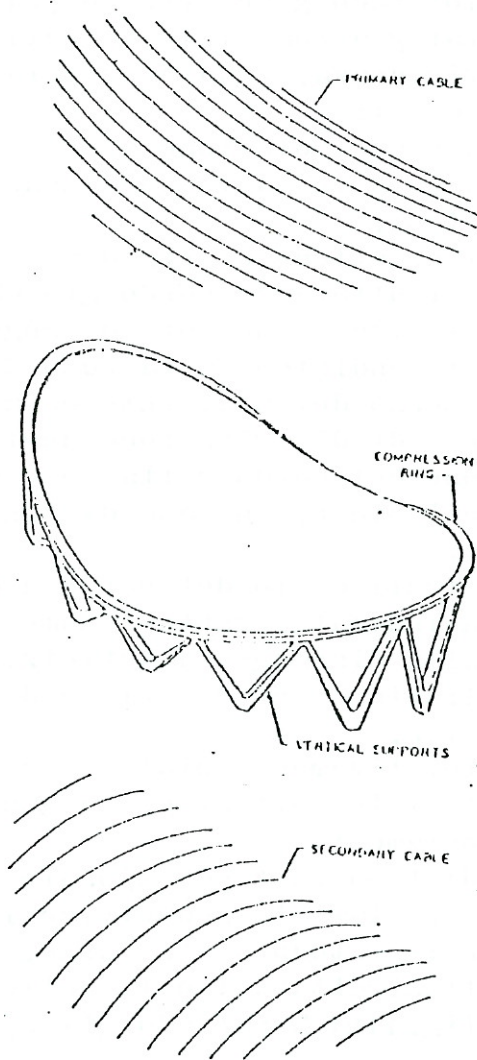


Fig. 11b

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB} \\ 0 & -G_B^T \\ & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (25)$$

dove :

$K$  = matrici di rigidezza della sottostruttura I relative ai nodi di tipo A (interni) e B di frontiera

$F$  = matrice di flessibilita' della sottostruttura II

$G$  = matrice di accoppiamento tra I e II

$\sigma_A; \sigma_B$  = vettori di spostamento in I

$x$  = forze indeterminate o di frontiera

$P_A; P_B$  = termini di carico in I

$\sigma$  = termini di spostamento in II

La risoluzione delle (25) si puo' ottenere in termini di spostamenti considerando :

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_A^* \end{Bmatrix} \quad (26)$$

con :

$$K_{BB}^* = K_{BB} + G_B F^{-1} G_B^T \quad (27)$$

e

$$P_B^* = P_B - G_B F^{-1} \delta \quad (28)$$

Dove  $K_{BB}^*$  e  $P_B^*$  sono da interpretarsi rispettivamente quali matrice di rigidezza e vettore dei carichi, trasformati dall'effetto degli spostamenti dei nodi comuni, ad I e II di tipo B, equivalente alla condensazione statica della sottostruttura II.

In campo non lineare, dove è necessario agire per via iterativa ed/o incrementale le (26) (27) e (28) suggeriscono di adottare un procedimento iterativo di rilassamento sequenziale che comprende le seguenti fasi :

- Determinazione delle forze di frontiera in II
- Valutazione di  $P_B^{*(1)}$  di primo tentativo (28)
- Valutazione di  $K_{BB}^{*(1)}$  " " " (28)
- Risoluzione delle (26)

e) Ritorna ad a)

f) Controllo di convergenza.

La non linearità geometrica e materiale è introdotta per via incrementale.

Nel caso di un impiego del metodo delle forze per le strutture in fune, l'aggiornamento si ottiene ciclicamente aggiornando le deformazioni con le (21) nel seguente modo,

$$L_{i,j}^{r+1} = L_{i,j}^r + \Delta L_{i,j}^{r+1} \quad (29)$$

L'aggiornamento della geometria si ottiene con le (15) sostituendo ciclicamente :

$$\begin{cases} X_i^{r+1} = X_i^r + u_i^{r+1} \\ Y_i^{r+1} = Y_i^r + v_i^{r+1} \\ Z_i^{r+1} = Z_i^r + w_i^{r+1} \end{cases} \quad (30)$$

Nel caso d'impiego del metodo degli spostamenti l'aggiornamento incrementale avviene direttamente sulla matrice di rigidità secondo l'espressione,

$$[\bar{K}]^{r+1} = [K_E + K_G]^r (\delta)^{r+1} = \{P\}^{r+1} - [\bar{K}_{NL}]^r (\delta)^r = \{P\}^{r+1} \quad (31)$$

dove:

$K_E$  = matrice elastica

$K_G$  = matrice geometrica

$P$  = vettore di carichi generalizzato

$K_{NL}$  = matrice dei coefficienti non lineari

$r$  = indice dell'incremento

All'interno dell'incremento vengono, iterativamente aggiornati i termini di carico fittizio  $\bar{P}$  fino a convergenza raggiunta.

## 6 ALCUNI ESEMPI NUMERICI

### 6.1 STRUTTURA A RETE

In fig.12 è illustrata una sequenza interattiva di progettazione. In fig.13 il diagramma carichi-spostamenti ci mostra il chiaro funzionamento in hardening della struttura.

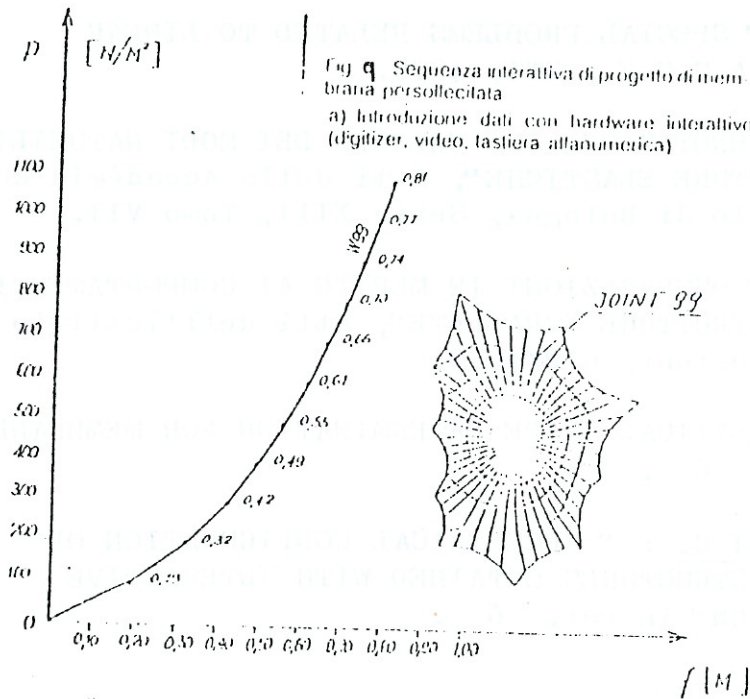
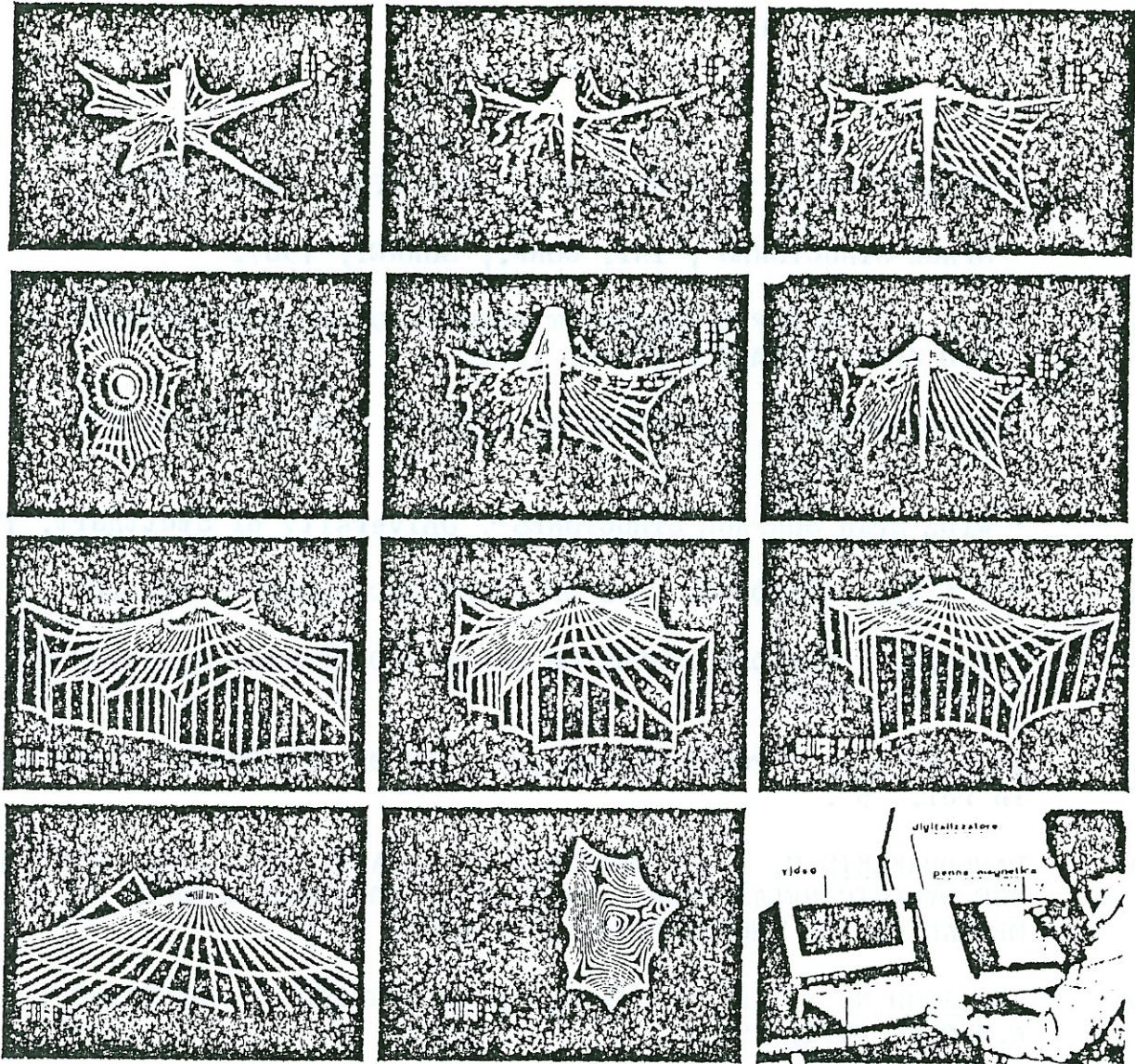


Fig 9 Sequenza interattiva di progetto di membrana percolicata  
 a) Introduzione dati con hardware interattivo (digitizer, video, tastiera all'numerica)

Inizio calcolo della ricerca della forma  
 Soluzione di stato "0"  
 Pianta  
 Prospettiva con linee nascoste  
 Rotazione  
 Zoom  
 Curve di livello



## B I B L I O G R A F I A

---

- 1 " COLLOQUIUM ON HANGING ROOFS", I.A.S.S., Paris, 1962.
- 2 " SPACE STRUCTURES", INT. CONF., SURREY, 1967.
- 3 " I.A.S.S. PACIFIC SYMPOSIUM PART II ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES", TOKYO, 1972.
- 4 " INTERNATIONAL CONFERENCE ON TENSION ROOF STRUCTURES", London, 1974.
- 5 " WIDE SPAN SURFACE STRUCTURES", University of Stuttgart, 1976.
- 6 " I.A.S.S. WORLD CONGRESS ON SPACE ENCLOSURES", Montreal, 1976.
- 7 " I.A.S.S. WORLD CONGRESS ON SHELL AND SPATIAL STRUCTURES", Madrid, 1979.
- 8 ASPLUND S.O. " FORCE-METHOD ANALYSIS OF ORTHOGONAL CABLE NETS", in ref. 5 .
- 9 PAPADRAKAKIS M. : " A METHOD FOR THE AUTOMATIC EVALUATION OF THE DYNAMIC RELAXATION PARAMETERS", COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING, 1981 (25).
- 10 ROY JOHN R. : " NUMERICAL ERROR IN STRUCTURAL SOLUTIONS", A.S.C.E., ST4, 1971.
- 11 MEYER CHRISTIAN : " SPECIAL PROBLEMS RELATED TO LINEAR EQUATION SOLVERS", A.S.C.E., ST4, 1975.
- 12 POZZATI PIERO : " ANNOTAZIONI SUL CALCOLO DEI MODI NATURALI DI VIBRARE DELLE STRUTTURE ELASTICHE", Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie XIII, Tomo VII.
- 13 CECCOLI CLAUDIO : " OSSERVAZIONI IN MERITO AI COMPORTAMENTI NON LINEARI DELLE STRUTTURE STABILITE", Atti dell'Istituto di Tecnica delle costruzioni, n.2/1979.
- 14 KAZUO ISHII : " ANALYTICAL SHAPE DETERMINATION FOR MEMBRANE STRUCTURES", in ref. 6 .
- 15 MAJOWIECKI M. TIRONI G. : " GEOMETRICAL CONFIGURATION OF PNEUMATIC AND TENT STRUCTURES OBTAINED WITH INTERACTIVE COMPUTER AIDED DESIGN" in ref. 6 .

- 16 ODENHAUSEN H. : " BASI TEORICHE PER L'IMPIEGO DEI CAVI DI ACCIAIO NELLE COSTRUZIONI", Acciaio, 1965 (2).
- 17 MICHAILOS J.; BIRNSTEIL C. : " MOVEMENTS OF A CABLE DUE TO CHANGES IN LOADING", A.S.C.E., ST 12, 1960.
- 18 BANDEL H.K. : " DAS HANGENDE STELL UNTER RAUMLICHER BELASTUNG UND TEMPERANDERUNG", DER BAU INGENIEUR, 1962, HEFT 4.
- 19 PEYROT A.; GOULOIS A. : " ANALYSIS OF FLEXIBLE TRANSMISSION LINES", A.S.C.E., ST5, 1978.
- 20 PEYROT A. : " MARINE CABLE STRUCTURES", A.S.C.E., ST 12, 1980.
- 21 PARBERRY R.D. : " A CONTINUOUS METHOD OF ANALYSIS FOR THE INFLATABLE DAM", A.S.C.E., 1976.
- 22 YERMOLOV U.V. : " ON METHODS OF DETERMINING A CYLINDRICAL SHELL'S PROFILE DEFORMED BY WIND ACTION", CIB-IASS Symposium on air supported structures, Venezia, 1977.
- 23 MAJOWIECKI M.; TIRONI G. : " INTERACTIVE COMPUTER AIDED DESIGN IN THE FIELD OF PNEUMATIC STRUCTURES", CIB-IASS, Venezia, 1977.
- 24 ODORIZZI S.; SCHREFLER B. : " CONTRIBUTO ALLO STUDIO DI RETI DI FUNI PRETENSE ENTRO STRUTTURE ELASTICAMENTE DEFORMABILI", Costruzioni Metalliche, n.3, 1974.
- 25 CHIARUGI A.; MAJOWIECKI M.; TIRONI G. : " ON THE DEFORMATIVE STATE OF PNEUMATIC STRUCTURES", ref. 7 .
- 26 ALESSI R.; BAIKAKTARIS D.; CARIDAKIS F.; MAJOWIECKI M. e ZOULAS F. : " THE ROOF STRUCTURES OF THE NEW SPORT ARENA IN ATHENS", ref. 7 .