



POLITECNICO DI MILANO - FACOLTA' DI INGEGNERIA  
PROGRAMMA DI ISTRUZIONE PERMANENTE

Corso di aggiornamento

TENSOSTRUTTURE, STRUTTURE PNEUMATICHE E MEMBRANE

(25-27 maggio 1983)

---

STRUTTURE PNEUMATICHE: METODI D'ANALISI

Massimo MAJOWIECKI

Istituto di Tecnica delle Costruzioni dell'Università di Bologna

---

Istituzioni promotrici

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA STRUTTURALE DEL POLITECNICO DI MILANO

COLLEGIO DEI TECNICI DELL'ACCIAIO

Direttore del Corso: Prof. Giulio Maier, Politecnico di Milano

## STRUTTURE PNEUMATICHE: METODI D'ANALISI

M. Majowiecki

### Premessa

Nella progettazione delle strutture pneumatiche, oltre al fondamentale problema della definizione della forma [1] (tipico d'altronde di tutte le coperture a membrana), risulta di primaria importanza l'individuazione della deformata sotto l'effetto delle azioni accidentali, quali vento e neve.

Ricordato infatti che per garantire l'esercizio di questo tipo di costruzioni occorre erogare continuamente energia, appare necessario pervenire all'individuazione dei legami esistenti fra la pressione interna alla membrana e l'intensità caratteristica o attuale delle azioni accidentali al fine di contenere i movimenti dell'involucro, e ciò essenzialmente per un duplice scopo :

- 1) Garantire un sufficiente margine di sicurezza nei confronti del raggiungimento di uno stato limite di utilizzazione (eccessiva deformazione) [2] coincidente talvolta con quello ultimo (basti pensare alle possibilità di lacerazioni del tessuto, una volta che questo venga a contatto con oggetti contenuti nell'involucro).
- 2) Permettere una conduzione corretta, e quindi economica, della costruzione, mantenendo quanto più bassa possibile la sovrappressione interna in relazione ai valori effettivi delle azioni accidentali.

Questo asservimento del sistema resistente all'intensità delle azioni esterne richiede, seppure in forma deterministica, in primo luogo di definire la distribuzione e l'intensità delle azioni esterne, quindi di disporre di un agile strumento di calcolo che permetta di risalire, assegnati i carichi, alla configurazione deformata della struttura in regime di grandi deformazioni.

Per quanto riguarda il primo aspetto, si osserva che per il carico neve ci si può riferire, con buona approssimazione, a intensità medie e a plausibili distribuzioni, mentre più incerta appare la scelta degli analoghi parametri relativi al vento.

Per individuare infatti la distribuzione della pressione esterna dovuta ad una corrente d'aria incidente sulla struttura si devono affrontare problemi assai complessi, in quanto essi rientrano nel tipico campo dei comportamenti dinamici delle strutture. Tuttavia recenti esperienze [3] sulla risposta dinamica di strutture pneumatiche, condotte in gallerie del vento su modelli di forma cilindrica allungata (rapporto fra la massima e la minima dimensione in pianta uguale a 2), sembrano dare indicazioni di sufficientemente semplici schematizzazioni.

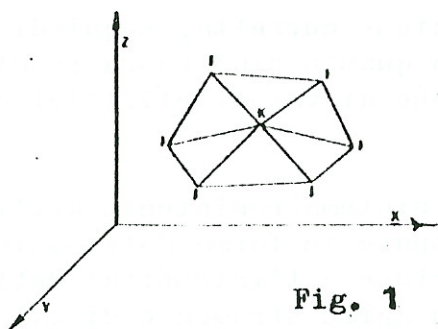
E' stata infatti rilevata, per quanto riguarda gli spostamenti, la debole importanza degli effetti dinamici rispetto ai valori determinati con un calcolo quasi-statico basato sulla velocita' di punta del vento, soprattutto ad elevate pressioni di gonfiaggio; inoltre, sempre in merito agli spostamenti, la loro previsione teorica, partendo da un campo di pressioni esterne misurato su un modello rigido, ha portato a risultati in soddisfacente accordo con le indicazioni sperimentali anche per situazioni che nel modello simulavano una velocita' del vento di 30 m/sec ed una pressione interna (debole) di 18 mm di acqua. Alla luce di questi risultati sperimentali emerge quindi l'attendibilita' di calcoli quasi-statici condotti riferendosi ad una distribuzione di coefficienti di pressione medi. Pur essendo questo problema ancora oggetto di molte ricerche, ci riferiremo alle indicazioni dianzi riportate per analizzare alcuni problemi di ricerca dell'assetto deformato.

## 1. -SCHEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA (IL MODELLO DISCRETO)

Per ovviare agli inconvenienti di convergenza e alle difficolta' di formulazione delle condizioni al contorno del modello continuo, offerti dalle equazioni di equilibrio in regime di membrana di un elemento infinitesimo di superficie [1], è opportuno riferirsi ad un modello matematico basato su elementi discreti piani assemblati in modo da formare la superficie pneumatica equilibrata.

### 1.1. -L'elemento di superficie

Consideriamo un nodo generico  $K = (X_k; Y_k; Z_k)$  apparentemente alla superficie di equilibrio e prendiamo in esame gli elementi triangolari che hanno un vertice in  $K$  (fig. 1).



Di questi elementi ne isoliamo un generico (1, 2, 3) fig. 2, riferito a coordinate locali. Si ipotizza che lo stato tensionale in esso sia costante.

Considerando le forze  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , staticamente equivalenti al campo di tensione costante, dirette secondo i lati del triangolo abbiamo che :

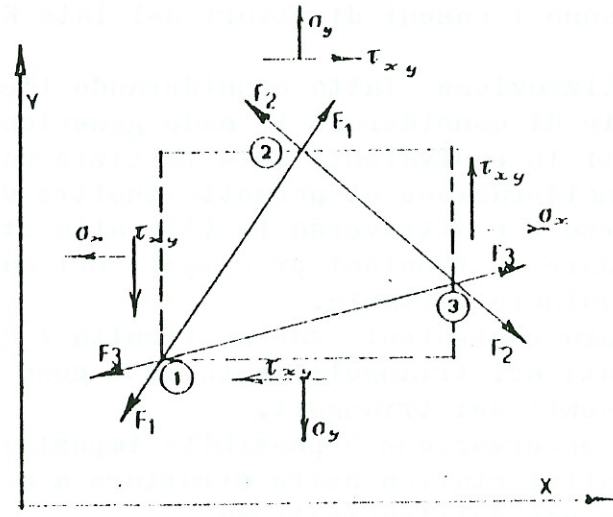


Fig. 2

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

dove:

$$[T] = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} \frac{l_{12}^2}{h_3} & \frac{l_{23}^2}{h_1} & \frac{l_{31}^2}{h_2} \\ \frac{m_{12}}{h_3} & \frac{m_{23}}{h_1} & \frac{m_{31}}{h_2} \\ \frac{l_{12} m_{12}}{h_3} & \frac{l_{23} m_{23}}{h_1} & \frac{l_{31} m_{31}}{h_2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$t$  = spessore della membrana

$h_1; h_2; h_3$  = altezze del triangolo misurate dai vertici 1, 2 e 3  
rispettivamente

$l_{KJ}$  ed  $m_{KJ}$  sono i coseni direttori del lato  $KJ$ .

La schematizzazione fatta considerando l'elemento a tensione costante permette di considerare il nodo generico  $K$  come sottoposto agli sforzi presenti in equivalenti aste fittizie concorrenti nel nodo.

Questa considerazione ci permette inoltre di risalire, dopo aver trovato le forze  $F$  e attraverso le (1), allo stato tensionale e quindi ad individuare le tensioni principali nel materiale continuo consistente l'involucro portante.

La struttura equivalente che ne risulta è quindi una reticolare formata dai lati dei triangoli, e le aste sono formate dalla unione dei lati adiacenti dei triangoli.

Da questa osservazione è possibile impostare la soluzione del problema dell'analisi statica delle strutture a membrana e pneumatiche, mediante il metodo dell'equivalenza.

## 2. -IL METODO DELL'EQUIVALENZA NEL CAMPO DELLE STRUTTURE PNEUMATICHE

Usando la teoria dell'equivalenza [12] è possibile ottenere, con considerevoli risparmi di tempo di calcolo e con notevoli semplificazioni nella interpretazione dei risultati, soluzione di problemi di elasticità bi-tridimensionale mediante l'impiego di un semplice programma di calcolo per strutture ad aste (bar - truss elements). Con questo metodo, la ricerca dello stato "0", dello stato di tensione e deformazione delle strutture pneumatiche, possono essere eseguite mediante lo stesso schema fisico-matematico adottato per le strutture a rete di funi.

Il principio di equivalenza consiste nel discretizzare l'energia totale  $\int U_0 dV$  del corpo continuo in modo da ottenere una espressione che rappresenti l'energia di deformazione di un insieme di aste articolate.

La determinazione delle caratteristiche meccaniche del modello equivalente (sistema ad aste) è ottenuta imponendo l'equaglianza delle espressioni dei potenziali ( $U_0 = U'_0$ ) tra struttura reale ( $U_0$ ) e modello equivalente ( $U'_0$ ).

Supponendo che il modello equivalente elementare sia sufficientemente piccolo, in modo da poter considerare il campo di deformazione uniforme all'interno degli elementi; considerando uno stato piano di tensione, l'espressione del potenziale elastico della struttura continua è :

$$(U_0) = \frac{E \cdot t}{2(1-\nu^2)} \left[ (e_{11})^2 + (e_{22})^2 + 2\nu e_{11} e_{22} + 2(1-\nu)(e_{12})^2 \right] \quad (3)$$

dove :

$E$  = modulo d'elasticita';

$\nu$  = coefficiente di poisson;

$t$  = spessore della membrana;

$e_{ij}$  = tensore di deformazione

D'altro canto l'espressione dell'energia di deformazione di un'asta articolata AB è :

$$W'_{AB} = \frac{1}{2} \rho_{AB} \left[ e_{11} \cos^2 \alpha + e_{22} \sin^2 \alpha + 2 e_{12} \sin \alpha \cos \alpha \right]^2 \quad (4)$$

dove :

$$\rho_{AB} = (E.A.L.)_{AB}; \quad (5)$$

$E$  = modulo d'elasticita' equivalente;

$A$  = area equivalente;

$L$  = lunghezza dell'asta;

$\alpha$  = angolo dell'asta con l'asse  $X_1$ .

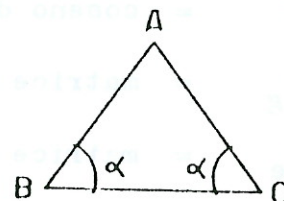


Fig. 3

Eguagliando le espressioni (3) e (5) per il modello triangolare considerato in fig. , con  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  si ha :

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} = \rho_{BC} = \frac{8 A \mu}{3} \quad (6)$$

dove :

$V$  = volume del triangolo ABC;

$\mu = E/2(1+\nu)$ .

L'espressione (6) è valida per  $\nu = 1/3$

Il modello di fig. (3), implica di realizzare, in fase di stato "0" una rete di maglie triangolari il piu' possibile equilatero. Piccole variazioni dal modello equilatero non comportano apprezzabili variazioni dei risultati, specialmente dovuto al fatto che lo stato di deformazione è essenzialmente dominato dalle condizioni di equilibrio e, nelle strutture pneumatiche la componente dominante del movi

mento è di tipo cinematico rigido (vedi esempi - Punto 5).  
Una volta definita la struttura equivalente realizzata da un grigliato di aste articolate è possibile ottenere la matrice di rigidezza elastica e geometrica elementare in riferimento globale, che è :

$$[K_G + K_e] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} \\ \frac{S^0}{AE} + c_x^2 & c_x c_y & c_z c_x & -\frac{S^0}{AE} - c_x^2 & -c_x c_y & -c_z c_x \\ c_x c_y & \frac{S^0}{AE} + c_y^2 & c_z c_y & -c_x c_y & -\frac{S^0}{AE} - c_y^2 & -c_z c_y \\ c_z c_x & c_z c_y & \frac{S^0}{AE} + c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -\frac{S^0}{AE} - c_z^2 \\ -\frac{S^0}{AE} - c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & \frac{S^0}{AE} + c_x^2 & c_y c_x & c_x c_z \\ -c_x c_y & -\frac{S^0}{AE} - c_y^2 & -c_z c_y & c_x c_y & \frac{S^0}{AE} + c_y^2 & c_z c_y \\ -c_z c_x & -c_z c_y & -\frac{S^0}{AE} - c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & \frac{S^0}{AE} + c_z^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

dove :

$S^0$  = sforzo iniziale di stato "0";

$C$  = coseno direttore dell'asta generica;

$K_G$  = matrice geometrica elementare;

$K_e$  = matrice elastica elementare.

La soluzione del problema, dopo avere eseguito l'assemblamento delle matrici elementari può essere ottenuto, via metodo degli spostamenti :

$$[K_E + K_G] \cdot \{\delta\} = \{P\} - \{P^*\} \quad (8)$$

dove :

$K_E$  = matrice globale elastica;

$K_G$  = " " " geometrica;

$\delta$  = vettore spostamento;

$P$  = vettore dei carichi applicati (pressione interna ed esterna)

$P^*$  = vettore dei termini non lineari.

Nel caso di esistenza di funi di stabilizzazione sulla membrana la rigidezza di queste può essere semplicemente addizionata. Il contributo di una fune generica in AB è chiaramente illustrato in fig. 4. La "struttura equivalente" può essere ora analizzata tenendo in considerazione tutti i problemi connessi alla risoluzione in campo di grandi spostamenti e, specificamente :

- non linearita' geometrica;
- " " materiale;
- unilaterali di sforzi ( $S > 0$ ).

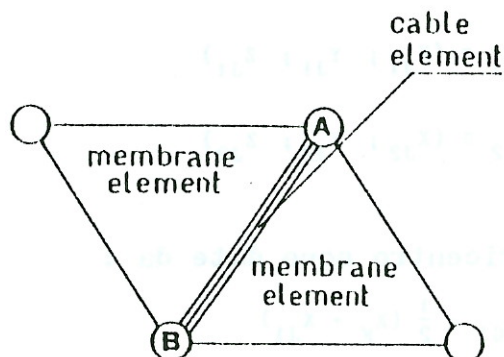


Fig. 4

Essendo il modello reale "membrana" schematizzato dal "modello equivalente" ad aste i metodi numerici di risoluzione dello stato "0" e degli stati di caricamento, sono identici a quelli illustrati nella lezione 14 (punti 4 e 5).

Trovato lo stato di sollecitazione nella struttura equivalente lo stato di tensione nella membrana puo' essere ottenuta con le (1) e con queste è possibile individuare le tensioni principali nel materiale continuo costituente l'involucro portante.

### 3. -I CARICHI STATICI EQUIVALENTI

I carichi distribuiti del peso proprio, della pressione interna, della neve, del vento, ecc.; debbono essere convertiti in carichi nodali.

Per trovare i carichi staticamente equivalenti agenti sui nodi consideriamo l'elemento generico ( $KJ_1 J_2$ ) fig. 4 soggetto ad una forza applicata nel suo baricentro e diretta normalmente al piano che contiene il triangolo.

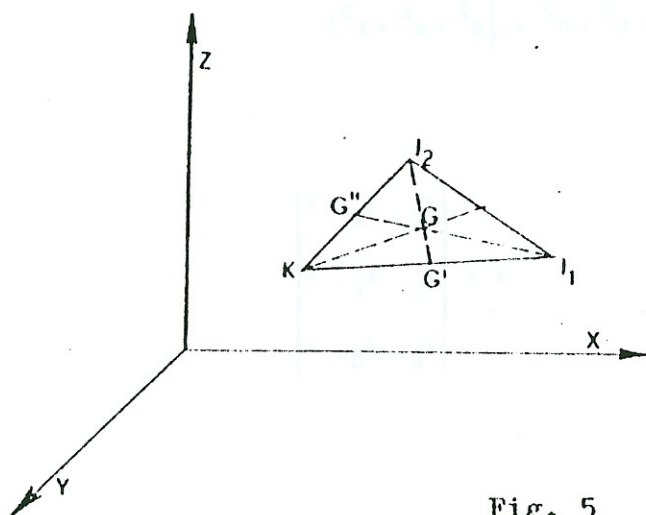


Fig. 5



Le coordinate dei punti nodali sono :

$$\left\{ \begin{array}{l} K \equiv (X_K; Y_K; Z_K) \\ J_1 \equiv (X_{J1}; Y_{J1}; Z_{J1}) \\ J_2 \equiv (X_{J2}; Y_{J2}; Z_{J2}) \end{array} \right. \quad (9)$$

le coordinate del baricentro sono date da :

$$G' \equiv \left\{ \begin{array}{l} X_{G'} = \frac{1}{2} (X_K + X_{J1}) \\ Y_{G'} = \frac{1}{2} (Y_K + Y_{J1}) \\ Z_{G'} = \frac{1}{2} (Z_K + Z_{J1}) \end{array} \right. \quad (10)$$

$$G'' \equiv \left\{ \begin{array}{l} X_{G''} = \frac{1}{2} (X_K + X_{J2}) \\ Y_{G''} = \frac{1}{2} (Y_K + Y_{J2}) \\ Z_{G''} = \frac{1}{2} (Z_K + Z_{J2}) \end{array} \right. \quad (11)$$

Considerando che l'area interessata dal carico equivalente agente nel nodo K sia l'area KGG'G'', questa sarà espressa dalla:

$$A_{KGG'G''} = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}) \quad (12)$$

dove

$$a = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_G & Z_G & 1 \\ Y_{G'} & Z_{G'} & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_G & Z_K & 1 \\ Y_{G''} & Z_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} Z_K & Y_K & 1 \\ Z_G & X_G & 1 \\ Z_{G'} & X_{G'} & 1 \end{vmatrix} \qquad e = \begin{vmatrix} Z_K & X_K & 1 \\ Z_G & X_G & 1 \\ Z_{G''} & X_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_G & Y_G & 1 \\ X_{G''} & Y_{G''} & 1 \end{vmatrix} \qquad f = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_G & Y_G & 1 \\ X_{G''} & Y_{G''} & 1 \end{vmatrix}$$

I coseni direttori della normale al piano del triangolo sono :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_x = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \alpha_y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \alpha_z = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{array} \right. \quad (13)$$

con

$$A = \begin{vmatrix} Y_K & Z_K & 1 \\ Y_{J1} & Z_{J1} & 1 \\ Y_{J2} & Z_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} Z_K & X_K & 1 \\ Z_{J1} & X_{J1} & 1 \\ Z_{J2} & X_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} X_K & Y_K & 1 \\ X_{J1} & Y_{J1} & 1 \\ X_{J2} & Y_{J2} & 1 \end{vmatrix}$$

Con queste espressioni è possibile ottenere il versore  $\bar{n}$  della normale alla superficie.

#### 4. -L'EQUILIBRIO DELL'INSIEME - ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA RICERCA DI STATO "0"

Procedendo ad assemblare tutti gli elementi l'equazione di equilibrio, legame che risolve il nostro problema, è data vettorialmente dalla :

$$\sum_{j=1}^{NA} S_{kj} = p \sum_{j=1}^{NA} \bar{n} A_{kj} \quad K = 1, N \quad (14)$$

dove

$N$  = numero nodi interni;

$NA$  = numero delle aste concorrenti nel nodo  $K$ ;

$p$  = pressione interna;

$\bar{S}_{kj}$  = sforzi equivalenti diretti lungo i lati degli elementi formati dalla somma delle  $F$  di due lati adiacenti;

$\bar{n}$  = versore della normale all'area generica di un elemento con vertice in  $K$ ;

$A_{kj}$  = area dell'elemento generico con vertice in  $K$ .

In forma compatta associata al sistema di riferimento globale abbiamo :

$$[\bar{T}] \cdot \{S\} = \{P\} \quad (15)$$

dove

$\bar{T}$  = matrice dei coseni degli angoli formati dalle aste con gli assi coordinati del riferimento globale.

Per risolvere il sistema di equazioni che derivano dalla (15) è stato adottato un sistema iterativo basato sul metodo delle successive sostituzioni.

Dati i valori degli sforzi nelle aste fittizie è possibile risolvere un sistema di equazioni non lineari dove le incognite sono i valori delle coordinate dei nodi interni della struttura.

Consideriamo perciò di avere ottenuto in questa maniera i valori numerici delle seguenti grandezze:

$$P_k^o = (X_k; Y_k; Z_k)$$

coordinate dei nodi interni

$$S_{kj}^o$$

sforzo nell'asta fittizia  $kj$

$$L_{kj}^o$$

lunghezza dell'asta  $kj$

Questo primo risultato, specialmente nella ricerca geometrica delle strutture pneumatiche, non soddisfa le ricerche di progetto. In fatti, per strutture con contorno rettangolare, le altezze ottenute in prossimità degli angoli sono molto scarse e perciò il risultato ottenuto manca di interesse applicativo reale (fig. 5)

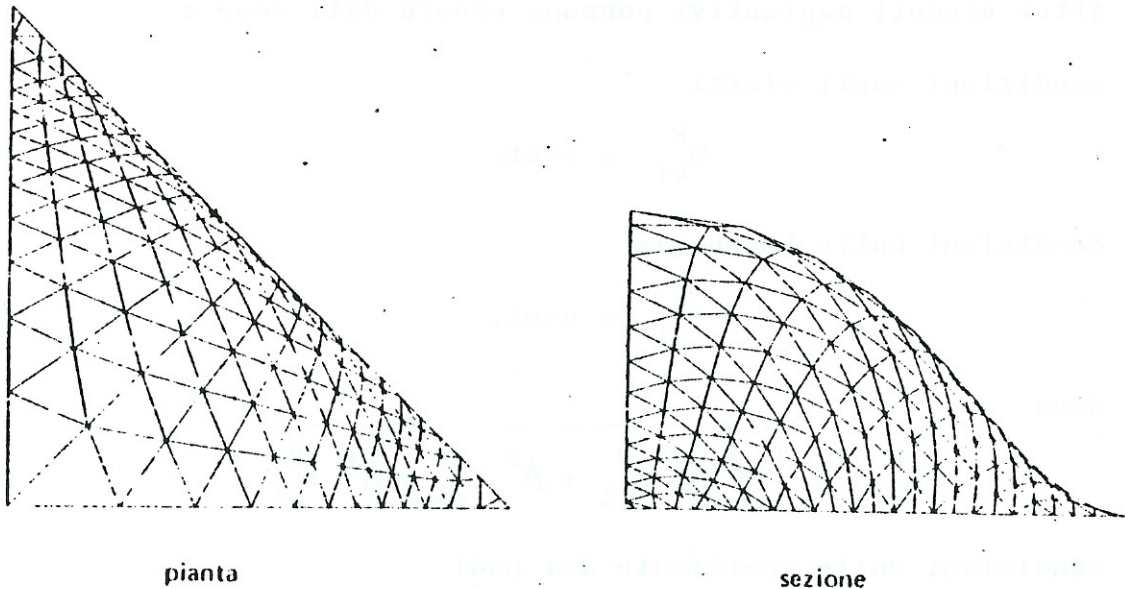


Fig. 5

Per ovviare a questi inconvenienti dovremmo, a parte le condizioni di equilibrio, introdurre degli ulteriori vincoli di progetto.

Il problema da risolvere si presenta in questi termini:

a) Si deve trovare una nuova superficie equilibrata e perciò dei nuovi valori di  $P_k^F = (X_k^F; Y_k^F; Z_k^F)$ .

b) La superficie sarà soggetta a dei vincoli di progetto quali :

- valori prestabiliti di  $L_{ki}^F$  (vincolo non lineare)

- " " "  $S_{kj}^F$  (vincolo lineare)

- " " "  $X_k^F; Y_k^F; Z_k^F$  (vincolo lineare)

c) La scelta tra le infinite superfici ottenibili con i vincoli suddetti verrà condizionata da una funzione obiettivo. Questa funzione obiettivo, in genere non lineare, ha il compito di farci trovare una superficie la più prossima possibile compatibilmente con i vincoli, alla superficie desiderata in fase di progetto.

Il problema suggerisce una risoluzione mediante un meccanismo automatico di ottimizzazione nella ricerca della superficie finale di progetto.

I vincoli sono rappresentati dalle condizioni di equilibrio (15).

Il numero di queste condizioni è  $3n$ , dove  $n$  è il numero dei nodi interni.

Altri vincoli aggiuntivi possono essere dati come :

- condizioni sugli sforzi

$$S_{ki}^F = \text{cost.} \quad (16)$$

- condizioni sulle lunghezze

$$L_{ki}^F = \text{cost.} \quad (17)$$

dove

$$L_{ki}^F = \sqrt{\Delta^F X_{ki}^2 + \Delta^F Y_{ki}^2 + \Delta^F Z_{ki}^2} \quad (18)$$

- condizioni sulle coordinate dei nodi

$$X_k^F = \text{cost.}; \quad Y_k^F = \text{cost.}; \quad Z_k^F = \text{cost.} \quad (19)$$

oppure

$$\frac{\Delta^F Z_k}{\Delta^F X_k} = \text{cost} \quad (20)$$

Queste ultime condizioni si sono dimostrate di notevole utilita' nella progettazione di strutture con vincoli rigidi di volumetria e altezze utili interne.

Per la risoluzione del problema dell'equilibrio con condizioni aggiuntive accessorie si veda il punto 4.1 della lezione N° 14.

## 5. -ALCUNE APPLICAZIONI

### 5.1. STRUTTURE PNEUMATICHE CILINDRICHE

Molti esempi di strutture pneumatiche presentano piante di forma allungata, tali da poter considerare le zone centrali come facenti parte di una membrana di forma cilindrica indefinita, non risentendo eccessivamente dell'influenza delle zone di estremita' concluse in genere con raccordi ad unghia.

Appare quindi legittimo affrontare tali casi riconducendo il problema allo studio di una struttura piana.

Al fine di esemplificare quanto precedentemente illustrato si sono risolti alcuni casi.

Nelle figure 6 e 7 è riportata la geometria che assume una struttura pneumatica allorquando vengono fissate, oltre alla lunghezza della sua linea direttrice, le condizioni per i suoi punti estremi (1 e 21) e ad esempio una condizione per un punto intermedio (es.: il valore di  $Z_8$ ); in questo caso, per la pressione interna  $p = 35/\text{Kg}/\text{m}^2$ , lo sforzo nella membrana risulta rispettivamente  $S_t = 246 \text{ Kg}/\text{m}$  nel tratto dal punto 1 al punto 8, e  $S = 334 \text{ Kg}/\text{m}$  dal punto 8 al punto 21.

Inoltre la figura 6 è indicata, sovrapposta alla forma iniziale, la configurazione deformata assunta dalla struttura, senza tener conto della elasticita' del materiale, per effetto di un carico verticale tipo neve ( $p_n = 15 \text{ Kg}/\text{m}^2$ ) fra i punti 11 e 14; come appare evidente dalla configurazione deformata, il punto 8 si sposta orizzontalmente (si è simulato appunto l'effetto di un vincolo a carrello). Ovviamente si trova che il regime degli sforzi si attenua leggermente aumentando la curvatura nella zona non caricata  $S_{\min(1-8)} = 232 \text{ Kg}/\text{m}$ ,  $S_{\min(8-21)} = 323 \text{ Kg}/\text{m}$ .

Nella figura 7 invece è indicata, sovrapposta alla forma iniziale, la configurazione deformata inestensionale sotto l'effetto di un carico tipo vento ( $p_v = 60 \text{ Kg}/\text{m}^2$ ) affetto da coefficiente  $C(\phi)$  (essendo  $\phi$  in un punto generico della struttura l'angolo formato dalla tangente alla membrana, rispetto all'orizzontale) che, a puro titolo esemplificativo, sono stati desunti dai diagrammi non strettamente pertinenti).

In questo caso la modificazione di tensione nella membrana da' :

$$S_{(1-8)} = 221 \text{ Kg}/\text{m}; S_{(8-21)} = 393 \text{ Kg}/\text{m} .$$

Sempre a titolo di esempio nelle figure 8, 9 e 10 è riportata come base la configurazione iniziale di una struttura pneumatica, per la quale si sono fissate le sole condizioni nei punti estremi: la figura 8 mostra gli assetti deformati, con la pressione interna di  $35 \text{ Kg}/\text{m}$  sotto l'azione di un carico di neve di intensita'  $p_n = 25 \text{ Kg}/\text{m}$ , nel tratto compreso fra i nodi 6 e 16, sia nel caso di materiale inestensibile, sia nel caso in cui per il prodotto  $E \cdot s$  si è assunto il valore di

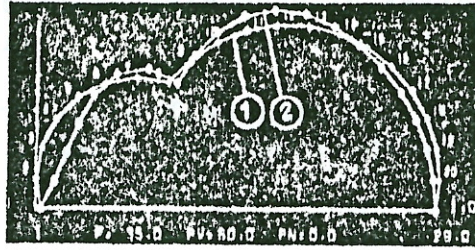


Fig. 6 Membrana cilindrica con punto intermedio vincolato ( $z = \cos t$ ); caso con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ;  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $p_n = 0$  ed  $E \cdot s = \infty$ .

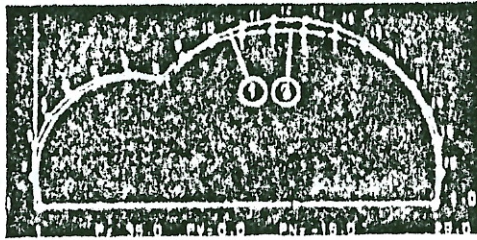


Fig. 7 Membrana cilindrica con punto intermedio vincolato ( $z = \cos t$ ); caso con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ;  $p_v = 0$ ;  $p_n = -15 \text{ kg/m}^2$  dal punto 11 al punto 14 ed  $E \cdot s = \infty$ .

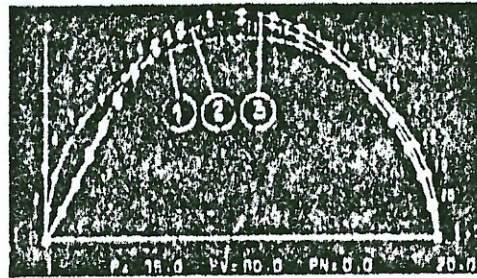


Fig. 8 Membrana cilindrica vincolata solo alle estremità; casi con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ; (1) Assetto in assenza di carichi esterni; (2)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = \infty$ ; (3)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = 3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}$ .

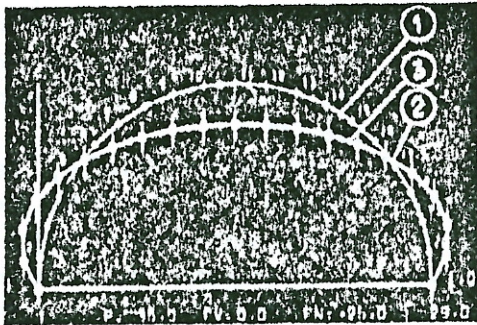


Fig. 9 Membrana cilindrica vincolata solo alle estremità; casi con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ; (1) Assetto in assenza di carichi esterni; (2)  $p_n = -25 \text{ kg/m}^2$  dal punto 2 al punto 20;  $E \cdot s = \infty$ ; (3)  $p_n = -25 \text{ kg/m}^2$  dal punto 2 al punto 20;  $E \cdot s = 5 \cdot 10^6 \text{ kg/m}$ .

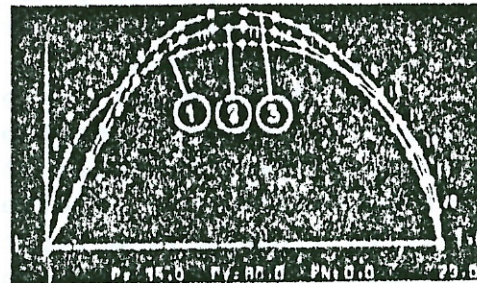


Fig. 10 Membrana cilindrica vincolata solo alle estremità; casi con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ; (1) Assetto in assenza di carichi esterni; (2)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = \infty$ ; (3)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = 3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}$ .

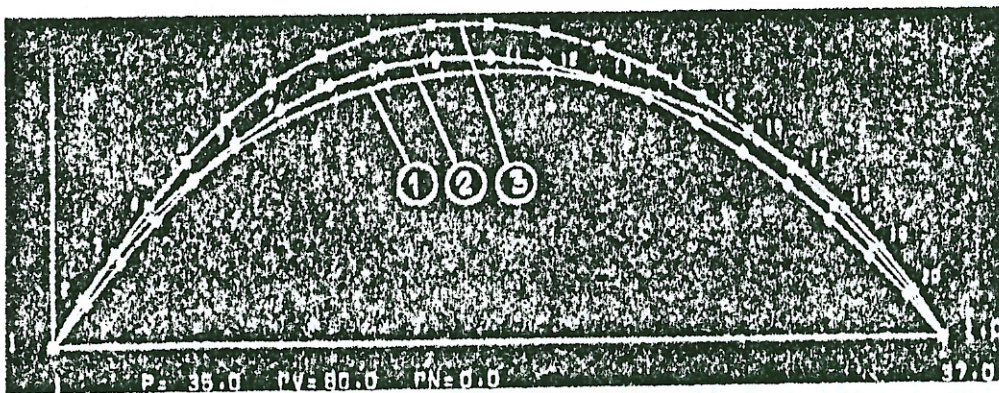


Fig. 11 Membrana cilindrica; casi con  $p = 35 \text{ kg/m}^2$ ; (1) Assetto in assenza di carichi esterni; (2)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = \infty$ ; (3)  $p_v = 80 \text{ kg/m}^2$ ;  $E \cdot s = 5 \cdot 10^6 \text{ kg/m}$ .

$5 \cdot 10 \text{ Kg/m}$ .

Nelle figure 9 e 10 sono invece riportati gli assetti deformati della membrana sotto l'azione di un carico per vento di intensità  $p = C(\theta)p_v$ , dove  $p_v$  è stato assunto pari a  $80 \text{ Kg/m}$  e la funzione  $C(\theta)$ , secondo quanto indicato da alcuni Autori [5], è quello dedotto da esperienze su modelli rigidi di ugual forma, avendo considerato il materiale sia inestensibile, sia deformabile con i valori di  $E \cdot s$  pari rispettivamente a  $5 \cdot 10 \text{ Kg/m}$  e  $3 \cdot 10 \text{ Kg/m}$ .

Per mettere tuttavia in evidenza l'influenza che può avere la deformabilità del materiale anche in ordine all'aggravamento della distribuzione delle pressioni in funzione di  $C(\theta)$ , si è quindi risolto il caso di una struttura più ribassata (fig. 11), sempre soggetta alle stesse condizioni di pressione interna e di vento, assunto ancora  $E \cdot s = 5 \cdot 10 \text{ Kg/m}$ .

In questo caso l'influenza della deformabilità del materiale si fa risentire in maniera sensibile in quanto, mentre lo sforzo di membrana iniziale vale  $S_0 = 703 \text{ Kg/m}$ , quello finale per  $E \cdot s = \infty$  vale  $S = 2.304 \text{ Kg/m}$ , che si riduce poi leggermente, per  $E \cdot s = 5 \cdot 10 \text{ Kg/m}$ , a  $S = 2.206 \text{ Kg/m}$ .

Dalla soluzione di questi casi è inoltre possibile pervenire al tracciamento di utili diagrammi che danno, ad esempio, lo spostamento massimo verso l'interno della membrana in funzione dei valori della pressione interna  $p$  e di  $p_v$ . Nella figura 12 sono appunto riportate le curve, a  $p = \text{cost}$ , che danno il valore dello spostamento massimo verso l'interno  $\delta_{\text{max}}$  (rapportato alla larghezza  $L$  della struttura), in funzione della  $p_v$ , per una struttura di forma iniziale come quella di fig. 8.

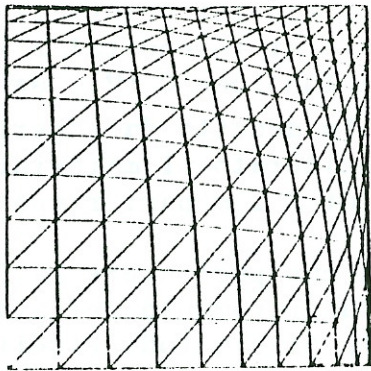
Fissato il valore massimo accettabile del rapporto  $\delta_{\text{max}}/L$ , è possibile ricavare l'andamento di  $p$  in funzione di  $p_v$  (in questo caso pressochè lineare nella fascia dei valori pratici di  $p$ ) utile per impostare il progetto di un servomeccanismo che automatizzi la conduzione della struttura. Va tuttavia osservato che le limitazioni precedentemente indicate non tengono conto di particolari stati di turbolenza della corrente d'aria che possono produrre anche singolari effetti sulla deformata.

## 5.2 STRUTTURE PNEUMATICHE SPAZIALI

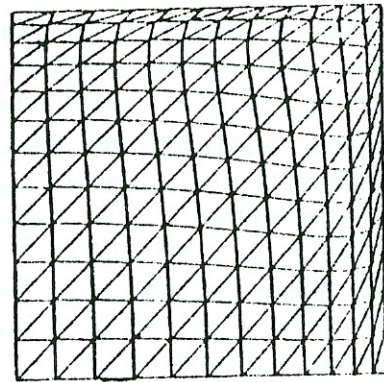
È importante notare che usando il metodo dell'equilibrio in campo non-lineare ed in regime di grandi spostamenti è frequente avere problemi di instabilità numerica.

Per ovviare a ciò è necessario possedere una buona soluzione di primo tentativo; osservando che l'effetto dei carichi, nelle strutture pneumatiche, produce solo modeste dilatazioni nel materiale, queste possono essere trascurate in un primo Step, in modo da ottenere una prima soluzione di tentativo notevolmente vicina alla soluzione elastica. Ottenuto il regime di tensione e deformazione rigida, è possibile passare, per mezzo dei metodi numerici illustrati nel punto 4, 5 della lezione 14, alla fase elastica.

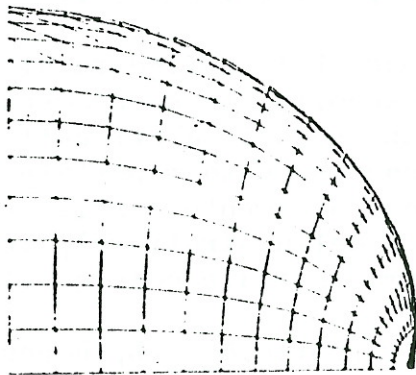




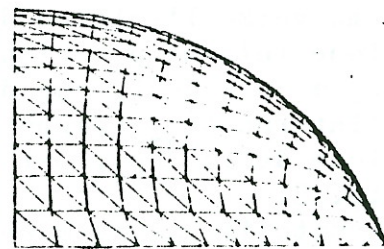
PIANTA



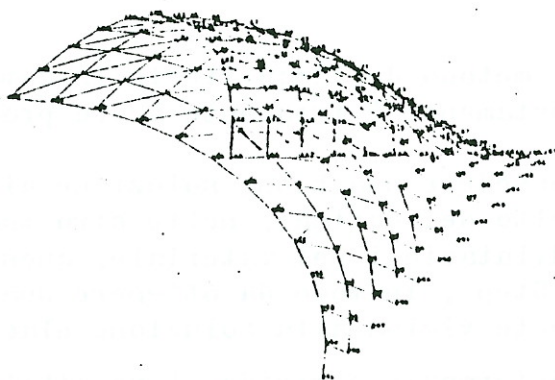
PIANTA



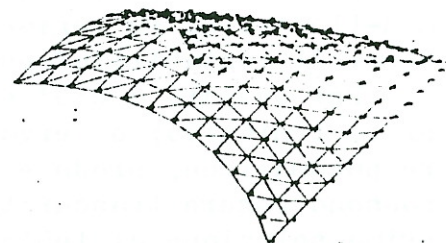
VISTA LATERALE



VISTA LATERALE



ASSONOMETRIA



ASSONOMETRIA

Fig. 13

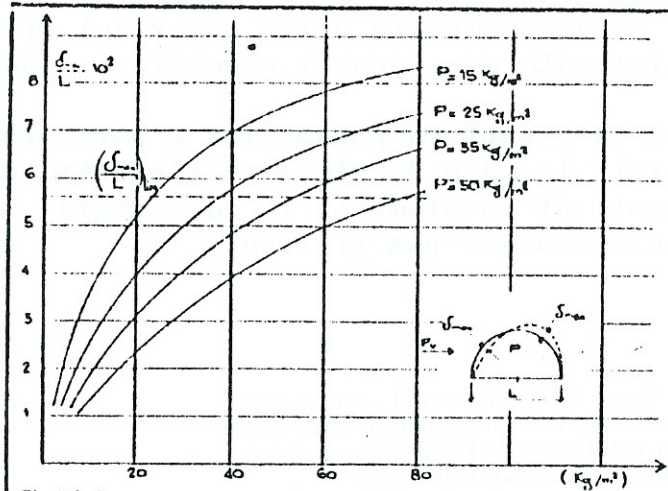
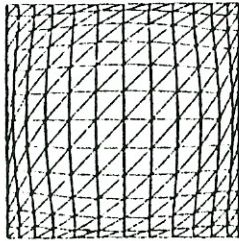
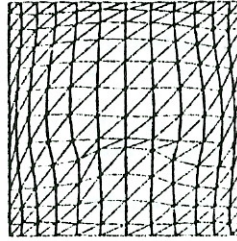


Fig.12 Curve a  $p = cost$  che danno il valore dello spostamento massimo verso l'interno  $\delta_{max}$  (rapportato alla larghezza  $L$  della struttura) in funzione della  $p_v$ .

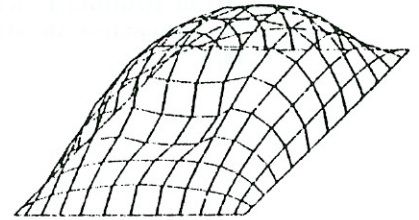
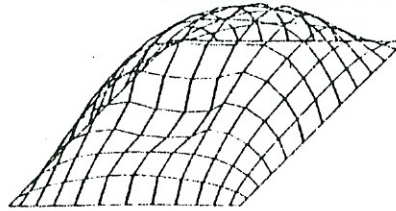
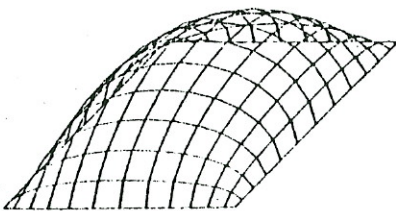
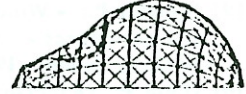
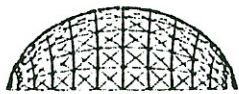
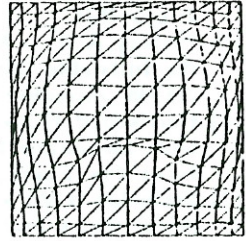
a) STATE "0"



b) UNELASTIC STATE



c) ELASTIC STATE



Quale esempio applicativo in fig. 13 è illustrata la ricerca di ottimo per la forma di una copertura quadrata di 36 m di lato. Piane, prospetti ed assonometrie delle soluzioni di tentativo e della soluzione ottimizzata con vincoli geometrici, sono immediatamente paragonabili.

In fig. 14 la struttura pneumatica è parzialmente caricata in una zona centrale in modo da simulare l'effetto di una raffica di vento. Le componenti di spostamento in fase rigida, ed in fase elastica, sono evidenziate con out-put grafico.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Majowiecki M., Tironi G.: « Geometrical configuration of pneumatic and tent structure obtained with interactive computer aided design ». IASS World Congress on Space Enclosures, Montreal, luglio 1976.
- [2] Augusti G., Chiarugi A., Spinelli P.: « Problemi strutturali e normativi nelle strutture aerosupportate a singolo strato ». CIB-IASS Int. Symp. on Air Supported Structures, Venezia, giugno 1977.
- [3] Grillaud G., Gandemer J.: « Etude de la response dynamique d'une structure gonfable: étude en soufflerie ». CIB-IASS Symp. Intern. sur les Structures Gonfables, Venezia, giugno 1977.
- [4] Uemura M.: « Membrane Tension and Deformation in Cylindrical Pneumatic Structures Subject to wind Loads ». IASS Pac. Symp. on Tension Structures, Tokyo, 1971.
- [5] Parbery R. D.: « A Continuous Method of Analysis for the Inflatable Dam ». Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, 725-736, dicembre 1976.
- [6] Harrison B. H.: « The Analysis and Behavior of Inflatable Membrane Dams under Static Loadings ». Proc. Instn. Civ. Engrs., 661-676, aprile 1970.
- [7] Yermolov U. V.: « On methods of determining a cylindrical shell's profile deformed by wind action ». CIB-IASS Int. Symp. on Air Supported Structures, Venezia, giugno 1977.
- [8] Geiger D., Majowiecki M.: « Strutture pneumatiche con funi di contenimento in acciaio per la copertura di grandi luci ». *Acciaio* n. 9 - 1977.
- [9] Spinelli P.: « Wind effects on a cylindrical air supported structures ». 3° Coll. on Buildings Aerodynamics Aachen, giugno 1978.
- [10] Haug E., Oelbermann J.: « Numerical design and analysis of pneumatic structures ». CIB-IASS Int. Symp. on Air Supported Structures, Venezia, giugno 1977.
- [11] Majowiecki M., Tironi G.: « Alcune applicazioni di progettazione interattiva mediante calcolatore nello studio di strutture fortemente deformabili ». *Progettazione automatica di strutture - INARCOS* n. 387 - 4 - 1978.