

ANALISI DI AFFIDABILITÀ: SENSIBILITÀ PARAMETRICA DI SISTEMI STRUTTURALI METALLICI

M.GIOVAGNONI¹, M.MAJOWIECKI², P.PARUOLO³

¹ *Libero professionista Ingegnere*

² *DISTART, Università di Bologna, Bologna*

³ *Dipartimento di Scienze Statistiche, Università dell'Insubria, Varese*

SOMMARIO

Osservazioni sul metodo della Simulazione Orientata per l'analisi di affidabilità ed applicazione per lo Studio di Sensibilità della nuova copertura dello Stadio Olimpico di Montreal.

ABSTRACT

Observations about Oriented Simulation Method for Reliability Analysis and his application for the Sensibility Analysis of the new roof system of the Olympic Stadium of Montreal.

1. INTRODUZIONE

In alcuni sistemi strutturali analizzati mediante metodi deterministici e probabilistici di primo livello quale il metodo semiprobabilistico agli Stati Limite, i coefficienti di sicurezza calibrati dalle norme non coprono le incertezze relative ad una modellazione teorica non rappresentativa del reale funzionamento strutturale.

In questi casi per determinare il livello di affidabilità della struttura è necessario procedere con metodi probabilistici di secondo e terzo livello, associati ad una analisi aleatoria di sensibilità parametrica.

Sistemi strutturali complessi dove siano presenti sottostrutture con regime meccanico molto differente (zone molto rigide in regime di "softening" e zone molto flessibili in regime di "hardening") presentano sovente notevole sensibilità alla variazione di alcuni parametri strutturali pur all'interno delle tolleranze costruttive.

Un tipico esempio di sensibilità parametrica, relativa alle deformazioni di stralli molto lunghi, si è presentata durante la progettazione delle strutture metalliche della nuova copertura dello Stadio Olimpico di Montreal che viene di seguito illustrato dettagliatamente.

2. ANALISI DI AFFIDABILITÀ

La normativa attuale riporta alcuni concetti di base dell'analisi di affidabilità. L'Eurocodice 3 afferma: "Una struttura deve essere progettata e costruita in modo tale che:

- (a) con una probabilità accettabile essa rimarrà idonea all'uso al quale è destinata tenendo conto della sua durata prevista e del suo costo; inoltre:
- (b) essa sopporterà, con un adeguato grado di affidabilità, tutte le azioni e tutti gli effetti che hanno probabilità di intervenire durante l'esecuzione e l'esercizio ...".

L'affidabilità è la probabilità che una struttura superi tutti gli stati limite stabiliti, per tutte le combinazioni di carico considerate, nel periodo della sua vita utile. Usualmente viene definita come il complemento della probabilità di insuccesso (P_f).

2.1. Analisi di Sensibilità

Consiste nello studio della sensibilità della struttura alla variazione di alcuni parametri che ne influenzano l'affidabilità.

2.2. Le incertezze connesse al progetto strutturale

Le incertezze che influenzano la sicurezza di una struttura o di un progetto strutturale sono di vario tipo [Melchers, 1987]: fenomenologiche, decisionali, di modellazione, di previsione, fisiche, statistiche, errori umani. Quest'ultimo può essere presente in fase di progettazione o di esecuzione ed è la principale causa di collasso strutturale; non si presta alla schematizzazione mediante modelli matematici, pertanto, normalmente, viene escluso dall'analisi di affidabilità; per limitare la probabilità di commettere errori grossolani, devono essere sviluppate, parallelamente alla progettazione, delle tecniche di Controllo di Qualità.

2.3. Definizioni dello stato limite

Lo stato limite viene definito mediante il confronto tra la variabile aleatoria considerata A e il valore ultimo per questa U ; tale confronto è causa di insuccesso se risulta $A \geq U$.

Si definisce una funzione di stato limite:

$$G(U, A) = \begin{cases} > 0 \rightarrow U > A \\ = 0 \rightarrow U = A \\ < 0 \rightarrow U < A \end{cases} \quad (1)$$

La regione in cui G è minore di zero è il cosiddetto dominio di insuccesso D_f .

2.4. Indice di sicurezza

Si consideri una variabile aleatoria normale X a media μ_X e deviazione standard σ_X ; sia X^* il valore limite con cui confrontarla.

Effettuando un cambio di variabile per passare alla distribuzione normale standard si ottiene

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad \text{mentre il limite diventa} \quad Z^* = \frac{X^* - \mu_X}{\sigma_X}.$$

In questo caso la funzione di stato limite è:

$$G(Z^*, Z) = Z^* - Z = \begin{cases} > 0 \rightarrow Z^* > Z \\ = 0 \rightarrow Z^* = Z \\ < 0 \rightarrow Z^* < Z \end{cases} \quad (2)$$

Il dominio di insuccesso è definito dalla disuguaglianza $Z^* < Z$.

Si definisce Indice di Sicurezza la distanza del limite Z^* , ovvero del dominio di insuccesso dall'origine di Z :

$$\beta = Z^* = \frac{X^* - \mu_X}{\sigma_X} \quad (3)$$

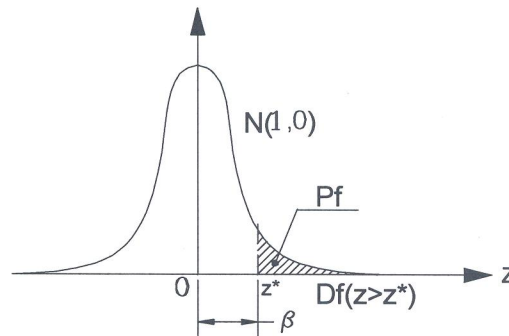


Fig. 1 – Variabile aleatoria con distribuzione di probabilità normale standardizzata: individuazione del dominio di insuccesso, dell'indice di sicurezza e della probabilità di insuccesso

β è pertanto una misura della sicurezza rispetto allo stato limite considerato, nel senso che tanto maggiore risulta tale indice, tanto più la struttura è sicura.

La affidabilità della struttura rispetto allo stato limite scelto si ricava con l'integrale

$$A = \int_{-\infty}^{X^*} f_X(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\beta} f_Z(u) du \quad (4)$$

La probabilità di insuccesso risulta quindi

$$Pf = 1 - A = 1 - \int_{-\infty}^{X^*} f_X(\xi) d\xi = \int_{\beta}^{\infty} f_Z(u) du \quad (5)$$

è cioè l'area sottesa (o il volume sotteso nel caso di più variabili) alla funzione di densità di probabilità nella regione identificata dal dominio di insuccesso.

Calcolata la probabilità di insuccesso della struttura in esame, occorre confrontarla con un valore di riferimento, per valutarne il livello di sicurezza.

I criteri di base per la definizione della probabilità accettabile sono due:

- Confronto del rischio di crisi strutturale con i rischi associati alle normali attività umane
- Criterio socio - economico

La normativa italiana e l'Eurocodice 3 fanno riferimento ad una probabilità accettabile di 10^{-6} .

3. SIMULAZIONE ORIENTATA

Il calcolo della probabilità di insuccesso può essere esteso a problemi multidimensionali, in cui n variabili aleatorie influenzano lo stato di sicurezza della struttura.

Per ogni variabile aleatoria deve essere scelta una distribuzione di probabilità, sulla base di dati sperimentali o dell'esperienza, oppure in appoggio al noto Teorema del Limite Centrale.

Sia \underline{x} un vettore a dimensione n , con valori in R^n , di variabili aleatorie aventi distribuzione normale standardizzata $\underline{x} \approx N(0, I^n)$; ovviamente, tale vettore rappresenta un punto dello spazio R^n .

Se $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ è la densità di probabilità congiunta delle n variabili aleatorie allora la probabilità di insuccesso è data dal seguente integrale:

$$Pf = \int_{Df} f_{\underline{x}}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} \quad (6)$$

Una stima di tale probabilità è data dalla frequenza con cui punti estratti casualmente in R^n appartengono al dominio di insuccesso Df della struttura.

Se m punti sono estratti e m_f di questi appartengono a Df allora la frequenza è

$$Ff = \frac{m_f}{m} \cong Pf \quad (7)$$

Il numero m di esperimenti da realizzare dipende dall'accuratezza desiderata per la Pf e dalla tecnica di campionamento adottata.

3.1. Determinazione dell'Indice di Sicurezza β mediante Iterazione Orientata

Il primo passo per il calcolo della Pf è la determinazione dell'indice di sicurezza β .

Questo scalare rappresenta il modulo del vettore che individua il punto sulla superficie $G = 0$ avente minore distanza dall'origine.

Poiché la distribuzione di probabilità delle n variabili aleatorie considerate è una multinormale a media zero, man mano che ci si allontana dall'origine la densità di probabilità decresce esponenzialmente e diventa sempre più piccolo il contributo dato al valore complessivo della probabilità.

Tale punto rappresenta inoltre la configurazione di collasso più probabile e, la conoscenza degli elementi strutturali che vanno in crisi in tale configurazione può essere un utile punto di partenza per una procedura di ottimizzazione degli elementi stessi.

Secondo il metodo di Iterazione Orientata, suggerito da Puppo e Bertero [1992], la determinazione di β si effettua attraverso i seguenti passi (Fig. 2):

1. Individuazione di una direzione casuale nello spazio standard (vettore iniziale).
2. Generazione di vettori con modulo multiplo del primo, nella stessa direzione e ricerca del primo punto appartenente al dominio di insuccesso.
3. Determinazione del punto di intersezione tra la direzione iniziale e la superficie $G = 0$ che individua il confine di Df .
4. Generazione di punti aventi la stessa distanza dall'origine β (è fissato il numero massimo di punti da generare n_{MAX}), attraverso il passaggio in coordinate polari, nell'intorno del punto trovato.

5. Verifica che uno dei punti generati appartenga a Df ; se questo accade, nella nuova direzione trovata, viene nuovamente cercato il punto di confine (si torna al passo 3);
6. Se nessuno degli $n < n_{MAX}$ punti dell'intorno cade dentro Df allora la distanza trovata β_n è l'indice di sicurezza β .

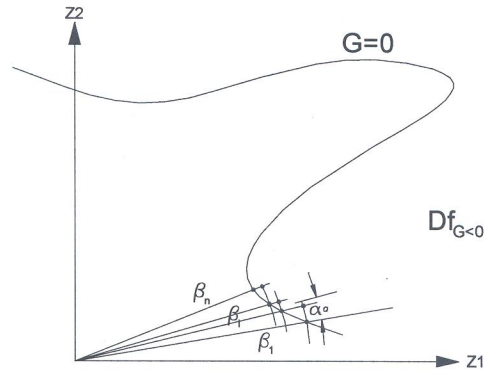


Fig. 2 – Iterazione Orientata per la ricerca dell'Indice di Sicurezza

3.2. Calcolo della Pf mediante Simulazione Orientata

Questo metodo consente di concentrare il campionamento nella regione dello spazio che fornisce il più alto contributo al valore della probabilità Pf . La regione di simulazione è individuata dal dominio D (Fig. 3) per definire il quale vengono scelti l'angolo α^* e il raggio esterno γ , mentre il raggio interno è l'indice di sicurezza già calcolato.

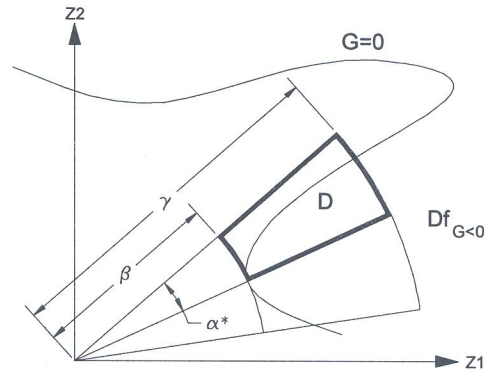


Fig. 3 – Individuazione del dominio D di campionamento per la Simulazione Orientata

Si effettua un cambio di variabile in coordinate polari, ottenendo le seguenti variabili: $r \in [\beta, \gamma]$, $\alpha \in [0, \alpha^*]$, $\vartheta_i \in [0, \pi]_{i=1, \dots, n-2}$, $\vartheta_{n-3} \in [0, 2\pi]$.

Vengono quindi generati m punti appartenenti al dominio D con densità di probabilità proporzionali a: $k_n(r^2)$ per la variabile r , $(\sin \alpha)^{n-2}$ per α , $(\sin \vartheta_1)^{n-3}$ per ϑ_1 , ..., $(\sin \vartheta_{n-4})^2$ per ϑ_{n-4} , $\sin \vartheta_{n-3}$ per ϑ_{n-3} , *uniforme* per ϑ_{n-2} ; qui $k_n(r^2)$ è la funzione di densità di probabilità del χ^2 con n gradi di libertà.

I punti devono essere generati in questo modo per risultare distribuiti nello spazio secondo una distribuzione normale standard.

La probabilità di insuccesso è stimata da:

$$Pf = R \frac{m_f}{m} \quad (8)$$

essendo $R = \int_D f_z(\underline{z}) \cdot d\underline{z}$ un coefficiente di normalizzazione, dovuto al fatto che la

simulazione è effettuata in una regione limitata dello spazio e non su tutto R^n .

La scelta del raggio esterno γ influenza l'errore che si commette nella simulazione: in pratica si decide di trascurare il valore dell'integrale che fornisce la Pf su tutta la regione di spazio esterna a tale raggio, ritenendo piccolo il contributo al valore complessivo di probabilità.

4. OSSERVAZIONI E PROPOSTE DI SOLUZIONE

4.1. Iterazione Orientata

Il metodo sopra esposto per il calcolo di β è soggetto a tre limiti:

1. il punto finale è minimo per il campionamento effettuato ma è possibile, aumentando n_{MAX} , trovare valori dell'indice inferiori;
2. la procedura non permette di evitare la convergenza a minimi locali;
3. gli angoli per il cambiamento di variabili non sono generati con una ottimale distribuzione di probabilità.

Per quanto riguarda il primo punto si può osservare che la costruzione di un efficace algoritmo permette di realizzare campionamenti con un grande numero di punti, fatto questo che consente di arrivare a buoni livelli di approssimazione sul valore di β .

Il secondo limite è dovuto al fatto che, nei problemi multidimensionali, è difficile stabilire se la superficie $G=0$ ha un solo minimo oppure vari minimi locali. La direzione iniziale, scelta casualmente, conduce ad un ben determinato punto di minimo e non ad altri, a causa della curvatura della superficie. Come è visibile nella Fig. 4 se la direzione di partenza è d_1 , l'iterazione conduce al minimo β_1 , mentre se la direzione è d_2 si troverà β_2 ; nel primo caso si commette una sovrastima della sicurezza della struttura esaminata.

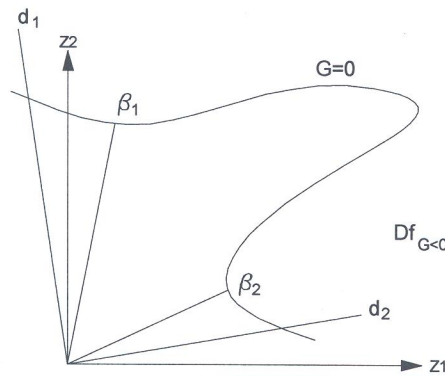


Fig. 4 – Convergenza della Iterazione Orientata a punti di minimo locale

Un primo accorgimento per evitare questo problema può essere l'utilizzazione di più valori dell'angolo di campionamento α^* (Fig. 3) che fissa la dimensione dell'intorno entro cui generare i punti. Tuttavia, se i minimi locali non sono tanto vicini da entrare nell'area coperta dall'angolo $2\alpha^*$ questo accorgimento non consente di evitare il problema.

Un procedimento che ha dato buoni risultati, anche se non da garanzie di convergenza al minimo assoluto, consiste nel considerare come direzioni iniziali dell'Iterazione Orientata i

versori degli assi del sistema di riferimento, effettuando in totale $2n$ ($n =$ numero delle variabili aleatorie) procedure di ricerca del minimo a partire da punti equidistribuiti nello spazio campionario. Viene poi scelto, tra quelli trovati, l'indice di sicurezza minore e la direzione corrispondente.

Infine Puppo e Bertero suggeriscono di generare gli angoli per la trasformazione in coordinate polari con densità di probabilità proporzionali a $(\sin \alpha)^{n-2}$, $(\sin \vartheta_1)^{n-3}$, ..., $\sin \vartheta_{n-3}$, *uniforme*. Occorre osservare che il procedimento dell'Iterazione Orientata non coinvolge nessun calcolo di probabilità ma consiste semplicemente in una iterazione geometrica per la ricerca del minimo della superficie $G = 0$; risulta pertanto più efficace, sia dal punto di vista teorico che della velocità di calcolo, generare, durante l'Iterazione Orientata, angoli con distribuzione uniforme.

4.2. Simulazione Orientata

Il procedimento di simulazione è caratterizzato dalla generazione di un grande numero di punti, resa necessaria dal fatto che si vuole stimare mediante una frequenza una probabilità molto piccola, dell'ordine di 10^{-6} .

Il metodo utilizzato da Puppo e Bertero per la generazione di punti in coordinate polari è chiamato in letteratura Acceptance Sampling Method.

È tuttavia possibile utilizzare il più efficiente Metodo della Trasformazione Inversa.

Si dimostra [Rizzi, 1992] che volendo generare una variabile X avente funzione di

ripartizione $F(X) = \int_0^x f_X(\xi) d\xi$ è sufficiente:

1. generare un numero casuale a distribuzione uniforme $u \approx U(0,1)$
2. determinare $x = F^{-1}(u)$

Le funzioni di ripartizione necessarie per la trasformazione in coordinate polari necessitano di una inversione numerica, in quanto non esistono le inverse analitiche.

5. COPERTURA DELLO STADIO OLIMPICO DI MONTREAL

Lo Stadio Olimpico di Montreal è attualmente coperto, nella sua parte centrale, da una membrana leggera (Kevlar rivestito di PVC) presollecitata a doppia curvatura, con geometria determinata tramite le condizioni al contorno nei 17 punti di ancoraggio (posizionati sopra la parte convenzionale di copertura delle tribune) e nelle 26 sospensioni interne. I cavi di supporto interni (funi chiuse in acciaio ad alta resistenza) sono vincolati alla torre, che costituisce il principale sistema di supporto della copertura. La membrana, tramite scorrimento dei cavi di sospensione, può essere retratta e posta nella parte sommitale della torre.

Dopo qualche anno di utilizzazione della copertura si sono verificate le prime lacerazioni, con origine nei punti di giunzione cavo – membrana.

Una commissione di esperti ha determinato, quali possibili cause del collasso:

- L'utilizzazione non adatta della struttura a membrana, che deve sopportare alti livelli delle tensioni medie e delle tensioni dovute ai carichi;
- Alte concentrazioni di tensione dovute al carico del vento;
- Riduzione della affidabilità del materiale, dovuta all'invecchiamento, alla fatica e ai danni provocati durante le fasi transitorie di ritiro e messa in posizione della copertura.

La proprietà ha quindi deciso di appaltare la progettazione di un nuovo sistema di copertura compatibile con le strutture già costruite: la copertura delle tribune e la torre di sostegno.

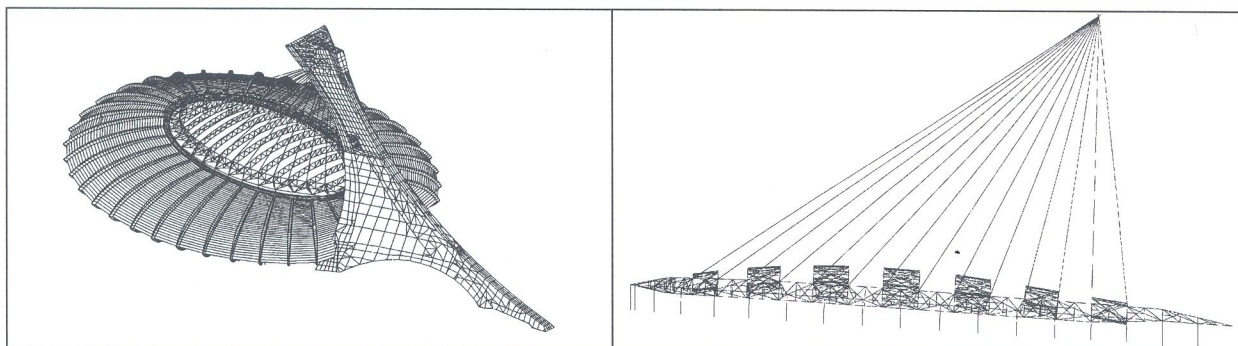


Fig. 5 – Modello matematico dello Stadio Olimpico e del nuovo sistema di copertura della parte centrale

Uno dei progetti elaborati prevede una copertura reticolare spaziale, costituita da un anello esterno e da travi trasversali (Fig. 5). L'anello è sostenuto da cavi ancorati alla torre ed è vincolato agli sbalzi della copertura delle tribune mediante dei martinetti ad azoto; tali martinetti garantiscono la stabilità per eventuali fenomeni di sollevamento della copertura centrale (effetto del vento) mentre non trasmettono carichi verso il basso.

5.1. Impostazione del problema

Si vuole effettuare una analisi di sensibilità dell'anello di sostegno a variazioni aleatorie delle deformazioni dei cavi rispetto alle condizioni di progetto (differenze di pretensione dovute a difetti di montaggio, distribuzioni di temperature non uniformi, allungamenti viscosi differenziali ecc.).

Questi effetti sono rappresentati attraverso il vettore di variabili aleatorie normali $\underline{\Delta\varepsilon}$. Nel vettore \underline{S}_g sono invece contenuti gli sforzi dovuti ai carichi permanenti.

Il problema consiste nella stima per simulazione numerica della probabilità, P_f , che le deformazioni complessive siano causa di sforzi, \underline{S} , maggiori della resistenza, \underline{S}_F , in una delle m aste dell'anello.

5.2. Dati deterministici

L'anello di sostegno è costituito da due parti sospese mediante 14 cavi ($n = 14$) e composte ciascuna da 92 aste ($m = 92$). Sono inoltre definite le seguenti grandezze:

\underline{S}_g vettore degli sforzi nelle aste causati dai carichi permanenti;

\underline{A} matrice di influenza (la i -esima colonna è l'insieme degli sforzi nelle aste, causati dalla deformazione unitaria del cavo i -esimo, con deformazione nulla negli altri cavi);

\underline{S}_{FC} sforzo ultimo in compressione per ciascuna asta;

\underline{S}_{FT} sforzo ultimo in trazione per ciascuna asta;

5.3. Dati probabilistici

Le variabili aleatorie raccolte nel vettore $\underline{\Delta\varepsilon}$ sono normali indipendenti con media zero e deviazione standard compresa tra $5 \cdot 10^{-5}$ e $2 \cdot 10^{-4}$.

La deviazione standard σ viene considerato come parametro per l'analisi di sensibilità.

5.4. Condizione di insuccesso

Il vettore degli sforzi nelle 92 aste è

$$\underline{S} = \underline{S}_g + \underline{A} \cdot \underline{\Delta\varepsilon}, \text{ dove } S_i = S_{gi} + \sum_{j=1}^{14} A_{ij} \cdot \Delta\varepsilon_j \quad (9)$$

La funzione di stato limite per ciascuna asta ($1 \leq i \leq 92$), $G_i(\underline{\Delta\varepsilon})$, è definita da

$$G_i = S_{FCi} - S_i \quad \text{se } S_i > 0;$$

$$G_i = S_{FTi} + S_i \quad \text{se } S_i < 0;$$

$$S_{FCi}, S_{FTi} > 0;$$

S_i, S_{gi} positivi per sforzo di compressione.

L'insuccesso dell'asta i -esima è rappresentato dal verificarsi dell'evento $G_i < 0$.

L'anello reticolare è una struttura isostatica, pertanto la crisi della singola asta provoca il collasso dell'intero sistema; il dominio di insuccesso è definito tramite l'espressione

$$Df = \{(G_1 \leq 0) \cup (G_2 \leq 0) \cup \dots \cup (G_{92} \leq 0)\} \quad (10)$$

La probabilità di insuccesso è data dall'integrale

$$\int_{Df} f_{\underline{\Delta\varepsilon}}(\underline{\Delta\varepsilon}) \cdot d\underline{\Delta\varepsilon} \quad (11)$$

poiché non è possibile trovare una soluzione analitica in forma chiusa, si stima tale integrale con la frequenza di insuccesso ottenuta mediante Simulazione Orientata.

5.5. Risultati dell'analisi di sensibilità

Le simulazioni sono state effettuate con diverso numero di punti, per valutare la precisione della misura di sicurezza ottenuta; sono stati poi conservati i valori della Pf con il minore errore relativo.

Nelle figure seguenti sono riassunti i risultati delle simulazioni.

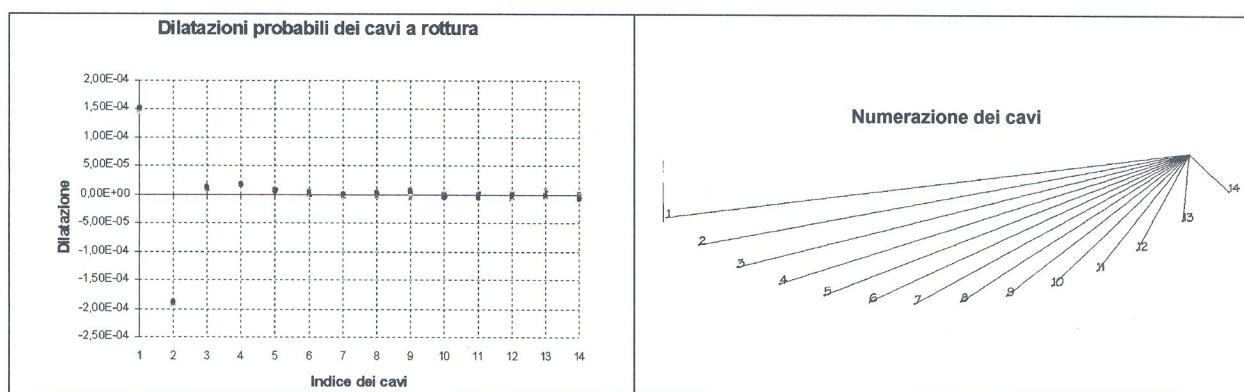


Fig. 6 – Dilatazioni più probabili dei cavi a rottura

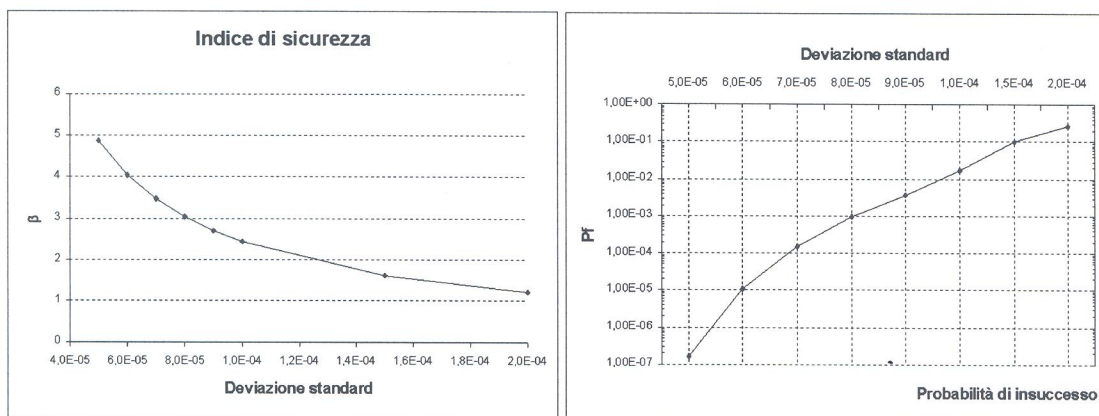


Fig. 7 – Variazione dell'Indice di Sicurezza e della Probabilità di Insuccesso al variare della deviazione Standard sulla lunghezza dei cavi

I valori più probabili delle dilatazioni a rottura sono praticamente indipendenti dalla variazione della deviazione standard (Fig. 6), cioè la configurazione di collasso si mantiene costante. Tale configurazione è caratterizzata da due allungamenti “grandi” rispetto agli altri, nei cavi più lunghi (1 e 2) ed ha una probabilità tanto maggiore di verificarsi quanto maggiore è l'incertezza sulla dilatazione dei cavi.

Gli allungamenti a rottura dei cavi 1 e 2 si possono facilmente ricavare:

$$L_1 = 171.7 \text{ m}, \Delta\varepsilon_1 = 1.5 \cdot 10^{-4}, \Delta L_1 = 25.8 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

$$L_2 = 165.5 \text{ m}, \Delta\varepsilon_2 = -2 \cdot 10^{-4}, \Delta L_2 = -33.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

6. Conclusioni

Sono state proposte alcune modifiche al metodo della Simulazione Orientata che consentono di rendere più efficiente l'algoritmo di calcolo.

Tale algoritmo è stato poi utilizzato per effettuare uno studio di sensibilità parametrica sul nuovo progetto per la copertura dello Stadio Olimpico di Montreal; si è così potuto rilevare che:

- il sistema è molto sensibile ad errori costruttivi e di montaggio relativi alle due funi più lunghe (1 e 2); se, ad esempio, la deviazione standard è incrementata da $6 \cdot 10^{-5}$ a $8 \cdot 10^{-5}$, la P_f passa da $1 \cdot 10^{-5}$ a $100 \cdot 10^{-5}$.
- le normali tolleranze costruttive non sono sufficienti ad eliminare le incertezze di risposta del sistema.
- è necessario un controllo più accurato e un ridimensionamento delle aste della struttura reticolare della zona di ancoraggio dei primi due cavi, per incrementare il livello di sicurezza della struttura.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Melchers R.E., 1987, “Structural Reliability”, JOHN WILEY & SONS.
- [2] Puppo A.H. e Bertero R.D., 1992, “Evaluation of Probabilities Using Orientated Simulation”, Journal of Structural Engineering, A.S.C.E., Vol. 118, N° 6, Giugno 1992.
- [3] Rosa R., 1992, “Lezioni sul metodo Montecarlo”, Editrice Lo Scarabeo, Bologna.
- [4] Rizzi A., 1992, “Inferenza Statistica”, UTET.